

533. Beretning fra Statens Husdyrbrugs forsøg

Anders R. Kristensen og Vagn Østergaard

**Optimalt udskiftningstidspunkt for
malkekøen fastlagt ved en stokastisk
model**

Optimal replacement time
of the dairy cow determined
by a stochastic model

With English Summary, Subtitles and
Appendix



I kommission hos Landhusholdningsselskabets forlag,
Rolighedsvej 26, 1958 København V.

Trykt i Frederiksberg Bogtrykkeri 1982

F O R O R D

Fastlæggelse af det optimale, d.v.s. økonomisk mest fordelagtige, udskiftningstidspunkt for den enkelte malkeko er et centralt spørgsmål i enhver besætning. Spørgsmålet er tidligere blevet behandlet, men først med det foreliggende arbejde er der udarbejdet en model, der er i stand til at fastlægge det optimale udskiftningstidspunkt under samtidig hensyntagen til koens forventede produktion i indeværende laktation og kommende laktationer.

Det foreliggende arbejde, der altovervejende er udført af Anders R. Kristensen, fokuserer på problematikken for malkekører af de tunge racer og anvender talmateriale fra Helårdforsøg med kvæg.

Professorerne Mats Rudemo og Mogens Flensted-Jensen, Institut for matematik og statistik, Den kgl. Veterinær- og Landbohøjskole takkes for værdifulde synspunkter ved diskussion af appendiks A, The Mathematical and statistical framework of the replacement model.

Beretningens manuskript er renskrevet af Kirsten Larsen og Hanne Kvorning.

København, september 1982

A. Neimann-Sørensen

	INDHOLDSFORTEGNELSE	Side
SAMMENDRAG		6
SUMMARY		14
1 INDLEDNING, PROBLEMFORMULERING OG MÅL		21
2 RELATION TIL TIDLIGERE UNDERSØGELSER		31
3 DATAMATERIALE		35
4 MODELEN OG DENNS FORUDSÆTNINGER		36
4.1 Specificering af en Markovkædemodel for udskiftning af mælkekøer		36
4.1.1 Kommentarer til modellen		40
4.2 Ydelsesmodel		42
4.3 Øvrige modelforudsætninger		45
5 ESTIMATION AF PARAMETRE		48
5.1 Overgangssandsynligheder		48
5.1.1 Sandsynlighedsfordelinger for kælvnings-intervallets længde		48
5.1.2 Ydelsesmodellens parametre		52
5.1.3 Overgangssandsynligheder med hensyn til mælkeproduktion		64
5.1.4 Overgangssandsynligheder mellem tilstande		66
5.2 Produktion og foderforbrug i de enkelte 4-ugers perioder		69
5.2.1 Mælkeproduktion		69
5.2.2 Foderforbrug		72
5.2.3 Spædekalv		75
5.2.4 Kælevkvie og utsat ko		75
5.3 Økonomisk resultat for et skridt		77
5.4 Diskonteringsfaktorer		80
6 OPTIMERING OG RESULTATER		82
6.1 Optimeringsprogram		82
6.2 Optimal politik under givne forudsætninger		85
6.3 Resultater vedrørende konkrete køer		89
6.4 Resultater vedrørende den indbyrdes prioritering af køer		91
6.5 Følsomhedsanalyser		92
6.5.1 Overlevelsessandsynligheder		92
6.5.2 Priser		95
6.5.3 Rente		97
7 DISKUSSION AF MODELEN, DENNS RESULTATER OG ANVENDELIGHED ..		98
8 LITTERATUR		103

APPENDICES:	side
A. THE MATHEMATICAL AND STATISTICAL FRAMEWORK OF THE REPLACEMENT MODEL	104
A.1 OPTIMIZATION BY USE OF MARKOV CHAINS.....	104
A.1.1 Fundamental concepts	104
A.1.2 Value iteration	106
A.1.3 Policy iteration	108
A.1.4 Linear programming	113
A.1.5 Economic loss if the optimal policy is not followed	113
A.2 THE STATE VARIABLE CONCERNING MILK YIELD	115
A.2.1 The theory of the Giaever model of milk yield ...	115
A.2.2 Handling milk yield when decisions are made several times during a lactation	123
A.2.3 Estimation of parameters in the model of milk yield	131
B.1 TABELLER VEDRØRENDE OVERGANGSSANDSYNLIGHEDER MED HENSYN TIL MÆLKEPRODUKTION	134
B.2 TABELLER VEDRØRENDE OPTIMALE LØSNINGER	138
B.3 TABELLER OVER DAGLIG AFLØNNING TIL STALD OG ARBEJDE PÅ KORT SIGT	145

SAMMENDRAG

Kap. 1 Indledning, problemformulering og mål

Enhver mælkeproducent står med mellemrum overfor at skulle tage stilling til udskiftning af malkekøer. Der må både træffes beslutning om hvor mange køer, der bør udskiftes årligt og ikke mindst hvilke. Da en høj udskiftning indebærer både fordele og ulemper, er det relativt kompliceret at afgøre hvilken udskiftningsprocent, der er optimal på årsbasis. Data fra gårde under Helårsforsøg med kvæg viser, at den faktiske udskiftningsprocent varierer stærkt mellem de enkelte besætninger.

Selv om det ved beregninger er muligt at finde frem til en optimal udskiftningsprocent, ville det imidlertid kun fortælle driftslederen hvor mange køer der årligt bør udskiftes, men derimod ikke hvilke. Målet med nærværende undersøgelse er derfor at udvikle en praktisk anvendelig metode til bestemmelse af det økonomisk optimale individuelle udskiftningstidspunkt for de enkelte køer ud fra de priser, den rente og det ydelsesniveau, der er gældende i en given besætning.

Problemet med udskiftning af malkekøer er noget mere kompliceret end de fleste andre udskiftningsproblemer på grund af den cykliske produktion med skiftevis goldperiode og kælvning med efterfølgende laktation. Både mælkeydelsen og tilvæksten er således svingende over tiden, og der må både tages stilling til, i hvilken laktation koen bør udskiftes og hvornår inden for laktationen.

Er der imidlertid truffet beslutning om, i hvilken laktation en ko bør udskiftes, kan problemet om hvornår inden for laktationen dog løses med relativt enkle metoder, idet der bør udskiftes, når det marginale dækningsbidrag for den gamle ko er lig med det gennemsnitlige dækningsbidrag for den nye. Dette princip er hidtil anbefalet til fastlæggelse af det optimale tidspunkt inden for laktationen, men det giver ikke svar på i hvilken laktation der bør udskiftes.

Da de to spørgsmål imidlertid indbyrdes er afhængige, vil de i den opstillede model blive behandlet sideløbende, så der på samme tid tages hensyn til både den kort- og den langsigtede udskiftning.

Kap. 2 Relation til tidlige undersøgelser

En af pionererne inden for udskiftningsteori var Preinrich (1940), som opstillede en model for optimal udskiftning af identiske anlæg i en uendelig investeringskæde. Da der imidlertid ikke tages hensyn til den individuelle variation, er en sådan model dog ikke anvendelig til fastlæggelse af optimal udskiftning af malkekører.

Først med udviklingen af dynamisk programmering (Bellman 1957) skabtes et værktøj, hvor det var muligt at tage hensyn til den stokastiske variation mellem køer. Howard (1960) udviklede en særlig gren inden for denne teknik, nemlig de såkaldte markovkæder, som senere har dannet grundlag for enkelte forsøg på at opstille modeller for optimal udskiftning af malkekører med udgangspunkt i det enkelte dyr.

Således har Smith (1971) og Reenberg (1979) præsenteret modeller, som dog i begge tilfælde kun har taget sigte på den langsigtede udskiftning (d.v.s. i hvilken laktation koen bør udskiftes). Nærværende arbejde har dog især forbindelse til- og kan derfor betragtes som en videreførelse af tidlige undersøgelser udført af Giaever (1966) og Kristensen (1982).

Kap. 3 Datamateriale

Modellens parametre estimeres på grundlag af oplysninger om ydelse, kælvninger og insemineringer vedrørende ca. 10500 laktioner fra 37 besætninger under Helårsværksforsøg med kvæg.

Kap. 4 Modellen og dens forudsætninger

De rent teoretiske aspekter af matematisk - statistisk art er bragt særskilt i appendiks A, hvorimod kapitel 4 omfatter formuleringen af udskiftningsproblemet i overensstemmelse med teorien i appendikset.

Tidsforløbet illustreres ved skridt af forskellig længde. Et skridt slutter og et nyt begynder i hver laktion på følgende tidspunkter: 12, 24 og 36 uger efter kælvning samt desuden altid, når en ko udskiftes.

En ko antages fuldstændigt at være beskrevet ved dens tilstand, der er

defineret ved værdien af følgende 4 tilstandsvariable:

Laktationsnummeret, der i modellen kan antage værdierne 1-4. En beslutning om at beholde koen 36 uger efter 4. kælvning betyder, at den beholdes til 36 uger efter 5. kælvning, som er det seneste tidspunkt, hvor en ko kan udsættes i modellen.

Tidspunkt i laktionen: 12, 24 eller 36 uger efter kælvning.

Ydelsesniveau. Der forekommer 5 niveauer i 1. og 4. laktion og 6 i 2. og 3. Denne variabel er et sammenvejet indeks (linearkombination) af ydelsen i indeværende og alle tidligere gennemførte laktioner. Frekvensfordelingen for de forskellige niveauer fremgår af tabel 4.1.

Kælvningsintervallets længde, som forenkles til kun at kunne antage værdierne 11, 13, 15 eller 16,5 måneder. Ved endnu længere intervaller antages koen altid udsat på grund af frugtbarhedsproblemer.

Kombinationer af disse 4 variable definerer 176 tilstande. Desuden defineres tilstand 177 som en situation, hvor den gamle ko udsættes og en kælvekvie indsættes. I tabel 4.2 er vist en samlet oversigt over tilstandsvariablene.

Afhængigt af tilstanden træffes ved begyndelsen af hvert skridt én af følgende beslutninger:

Behold koen.

Udskift straks koen med en kælvekvie.

Udskift om 4 uger koen med en kælvekvie.

Udskift om 8 uger koen med en kælvekvie.

Grundenheden i modellen er en enkelt ko og dens successive efterfølgerne i al fremtid. Det er dog muligt at bearbejde resultaterne på en sådan måde, at de også giver værdifuld vejledning når problemet betragtes på besætningsniveauer (se kap. 6).

Valget af tilstandsvariable er foretaget efter følgende to hovedkriterier. For det første skal de være væsentlige faktorer i beslutningsgrundlaget og for det andet er det ønskeligt at de giver et godt grundlag for at forudsige tilstanden i næste skridt.

De tre førstnævnte variable opfylder begge kriterier, hvorimod kælvningsintervallets længde kun opfylder det første. På grund af EDB-sprogets (SAS) kapacitet var det ikke muligt at inddrage yderligere variable i modellen.

I modellen beskrives 308 dages (44 ugers) ydelsen y_{an}^{44} ved følgende regressionsligning:

$$y_{an}^{44} = b_{no} + b_{ni}G_a + b_{n2}KI_{an} + u_{an}$$

- hvor b' erne er regressionskoefficienter for den n'te laktation; G_a er et alderskorrigert besætningsgennemsnit for den besætning koen a indgår i; KI_{an} er kælvningsintervallets længde i dage og u_{an} er et relativt mål for koens ydelse i den pågældende laktation. Virkningen af KI_{an} antages kun at have betydning, når KI_{an} er mindre end 430 dage. Inddragelse af G_a i regressionen bevirket, at der kan optimeres for netop det ydelsesniveau, der er aktuelt i den enkelte besætning.

u_{an} kan dog ikke anvendes direkte som tilstandsvariabel, idet teorien (se appendiks A) da kræver at u_{an} kun må afhænge af u_{an-1} , men skal være uafhængig af u_{an-2}, \dots, u_1 . Det har derfor været nødvendigt at definere tilstandsvariablen for ydelsen for koen a som følger:

$$v_{an} = a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_{an}$$

- hvor a' erne er konstanter, der kan fastlægges på en sådan måde, at det nævnte krav er opfyldt.

I praksis udsættes køer også af årsager, der ikke vedrører de 4 tilstandsvariable - hovedsageligt sygdom. I modellen arbejdes derfor med sandsynligheder for, at en ko ikke udsættes af sådanne årsager, som ikke vedrører de 4 tilstandsvariable. Disse såkaldte overlevelsessandsynligheder fremgår af tabel 4.3.

Kap. 5 Estimation af parametre

I modellen indgår 3 typer hovedparametre, nemlig overgangssandsynligheder mellem tilstande, økonomiske uddybter i de enkelte skridt og endelig diskonteringsfaktorer til korrektion for tidsforskellen mellem de forskellige skridt i kæden.

Disse hovedparametre bygger hver især på en række grundparametre, der estimeres direkte på grundlag af datamaterialet omtalt i kapitel 3. Grundparametrene indlæses i optimeringsprogrammet sammen med andre nødvendige forudsætninger som foderforbrug, vægtforløb, overlevelsessandsynligheder etc. Først ved selve optimeringen beregnes de endelige hovedparametre, hvoraf diskonteringsfaktorerne også afhænger af

renten, og det økonomiske udbytte også af såvel priser som rente, der må specificeres ved optimeringen.

Ved denne fremgangsmåde opnås, at de enkelte grundparametre og -forudsætninger kan ændres individuelt, uden at det i øvrigt griber ind i programmet.

Kap. 6 Optimering og resultater

I appendiks A er gennemgået to algoritmer til optimering af Markovkæde-modeller. Til den aktuelle model valgtes den såkaldte policy-iteration algoritme, som er den mest effektive. Til EDB-programmeringen anvendtes datamatsproget SAS. Udgangspunktet for programmet er et datasæt med følgende oplysninger om den enkelte ko:

- 1) Besætning.
- 2) Konummer.
- 3) Laktationsnummer.
- 4) 308 dages ydelser i kg 4% mælk for alle foregående laktationer.
- 5) Forventet 308-dages ydelse i kg 4% mælk for indeværende laktation.
- 6) Dato for hver enkelt af koens kælvninger.
- 7) Dato for seneste inseminering i indeværende laktation.
- 8) Dato for seneste kontrollering.

Først udregner programmet tilstanden for hver enkelt ko. Dernæst beregnes modellens parametre under netop de særlige forudsætninger (priser, rente, sundhedsniveau) der gælder for den pågældende besætning, samt de biologiske sammenhænge, der er fundet i kapitel 5.

Herefter følger selve optimeringen som beskrevet i appendiks A, hvilket resulterer i en optimal udkiftningspolitik, d.v.s. en optimal beslutning for hver enkelt tilstand. Denne kædes nu via den tidligere beregning af tilstande for de enkelte køer sammen med de konkrete køer i den pågældende besætning. Resultatet bliver en liste over køer, der befinner sig ved begyndelsen af et skridt med angivelse af den optimale beslutning for hver enkelt ko samt tabet ved at træffe hver enkelt af de ikke-optimale beslutninger.

Endelig opstilles en prioteringsliste omfattende alle køer mellem 12 og 44 uger efter kælvning. Denne liste angiver, i hvilken rækkefølge køerne bør udsættes.

I tabellerne B.12 - B.14 er vist eksempler på udskrifter vedrørende gården H 64-2 i april 1982 under de forudsætninger, der fremgår af tabel 6.1 og den dertil hørende tekst. I praksis vil disse forudsætninger blive indberettet på et skema som vist i figur 6.1.

Tabel B.12 (optimal udskiftningspolitik) har mest teoretisk interesse og vil ikke blive udsendt til driftslederen. Derimod giver tabel B.13 (optimale beslutninger for enkelte køer) værdifuld information, idet den fortæller, hvad der set fra et økonomisk synspunkt er optimalt, ligesom der gives oplysninger om det økonomiske tab ved at træffe en ikke-optimal beslutning. Driftslederen får ved hjælp af disse tab mulighed for at afveje forhold som temperament og malkbarhed mod eventuelle økonomiske tab ved at træffe ikke-optimale beslutninger.

Ligesom tabel B.13 vil prioteringslisten vist i tabel B.14, blive udsendt til driftslederen. Denne liste er meget væsentlig, fordi den dels omfatter alle køer mellem 12 og 44 uger efter kælvning og dels er uafhængig af om der udskiftes med en kælvekvie, eller besætningen i stedet reduceres.

For at undersøge hvor stabile de fundne resultater er med hensyn til ændrede forudsætninger, udførtes en række følsomhedsanalyser, hvor overlevelsessandsynligheder, priser og rente ændredes. Resultaterne fremgår i hovedtræk af tabel 6.2.

Det viste sig, at kun ændringer i overlevelsessandsynlighederne samt enkeltstående ændringer i priser på kælvekvier eller udsætterkøer havde mærkbart indflydelse på de optimale beslutninger. Proportionale ændringer i både priser på kælvekvier og udsætterkøer var derimod næsten uden betydning, hvilket er væsentligt, da dette er det normale markedsbillede.

Endvidere bekræftede resultaterne fra følsomhedsanalyserne den centrale betydning af prioteringslisten (tabel B.14), idet den var næsten upåvirket af alle ændrede forudsætninger.

Kap. 7 Diskussion af modellen, dens resultater og anvendelighed

Alle resultater i tabellerne B.12 til B.14 virker indbyrdes logisk rigtige. Dette gælder både ved sammenligning af optimale beslutninger i forskellige tilstande og ved sammenligning af økonomiske tab ved at

at træffe forskellige ikke- optimale beslutninger. Ändringerne i de optimale beslutninger er ligeledes logisk rigtige.

Ved optimeringen forudsættes, at de valgte priser og den valgte rente ligger fast i fremtiden, hvilket ikke er realistisk. Betydningen af dette er dog meget lille, idet en almindelig inflatorisk udvikling ikke har nogen betydning, dels fordi en proportional forøgelse af alle priser ingen betydning har for resultaterne, og dels fordi inflationsraten kan indbygges i kalkulationsrenten. Endvidere har følsomhedsanalyserne vist, at de eneste prisændringer, der virkelig har betydning for de optimale beslutninger, er prisforholdet mellem en kælvekvi og en udsætterko; men i praksis er sådanne ændringer sjældne.

Forudsætningen om faste priser er således ikke nogen væsentlig svaghed. Det samme gælder forudsætningen om fast rente, idet denne har meget lille betydning for resultaterne.

Selv om der ikke direkte tages hensyn til genetisk fremgang, er dette alligevel indirekte indbygget, idet nye kviers ydelse altid antages at være normalfordelt omkring det aktuelle ydelsesniveau i den enkelte besætning. Hvis ydelsen stiger over tiden som følge af genetisk fremgang, antages middelydelsen for kvier derfor at stige tilsvarende.^

Ud over de valgte tilstandsvariable ville det være relevant at indrage en variabel for almen sundhedstilstand og yderligere én for kropsvægt. Dette har dog ikke været muligt, dels fordi antallet af tilstande da ville øges langt ud over EDB-sprogets kapacitet, og dels fordi det ville kræve ekstra registreringer i besætningerne i praksis. Som modellen nu foreligger, kræver den kun registreringer, der alle rede foretages i enhver ydelseskontrolleret besætning.

Følsomhedsanalyserne viste, at prioriteringslisten (se tabel B.14) er meget stabil over for ændrede forudsætninger (også ved ændring af prisforholdet mellem kælvekvi og udsætterko). Endvidere er den uafhængig af, om der udskiftes med en kvie, eller besætningsstørrelsen i stedet justeres. Desuden omfatter den alle køer, der befinner sig mellem 12 og 44 uger efter kælvning. Disse forhold bevirker, at listen over den indbyrdes prioritering må betragtes som det væsentligste resultat, optimeringen resulterer i.

Der er tale om en meget fleksibel model, hvor priser, rente og sundhedsniveau specificeres individuelt for den enkelte besætning. Da besætningens ydelsesniveau endvidere automatisk inddrages, bliver resultatet individuelle løsninger nøje tilpasset den enkelte besætning. Sæfremt det senere på grundlag af ny viden bliver nødvendigt at justere visse parametre, vil det uden videre kunne gøres, uden at det i øvrigt griber ind i optimeringsprogrammet.

Det er dog en svaghed, at overlevelsessandsynlighederne har måtte skønnes. Selv om skønnene dog fører til realistiske udskiftningsprocenter, bør de senere estimeres på et empirisk datamateriale.

Til fastlæggelse af den optimale udskiftning på kort sigt bruges der særlige tabeller uden for modellen. Sådanne tabeller, der er lette at gå ind i, er anført som B.15 til B.17 i appendiks B.

Modellen vil i den nærmeste fremtid blive taget i anvendelse på gårde under Helårsforsøg med kvæg.

SUMMARY

Chapter 1 Introduction, problem formulation and aim

Every dairy farmer frequently has to decide firstly how many cows to replace during a year, and secondly which ones to choose for replacement. Because a large replacement percent (culling rate) involves both advantages and disadvantages, it is rather complicated to tell, what the optimal culling rate should be.

Even if an optimal rate was calculated, it would only tell the dairy farmer how many cows to replace, but not which to choose. The aim of this study is to develop a method for determining the individual replacement time that is optimal from an economic point of view, when the current prices and interest rate are assumed.

Dairy cow replacement is a rather complicated problem because of the cyclical nature of milk production and body tissue gain, i.e. the gestation - lactation cycle. This means that the dairy farmer has to decide during which lactation, the cow should be replaced and further when to replace within that lactation.

However, if it is decided during which lactation to replace a cow, then the second question can be answered by rather simple methods. In that case the cow should be replaced, when the marginal revenue of the old cow equals the average revenue of the heifer. This method is generally recommended to determine when to replace within a lactation, but it gives no answer to the first question.

Because both problems are reciprocally dependent, they will be solved simultaneously in this study.

Chapter 2 Relation to previous investigations

A pioneer of replacement theory was Preinrich (1940), who formulated a model to calculate optimal replacement time in a sequence of identical assets. The individual variation among assets, however, was not considered, which means that the method cannot be used for our purpose.

A theoretical framework for handling this was not available until Bellman (1957) introduced the dynamic programming technique from which Howard (1960) developed Markov processes as a tool of optimization. These methods have been used by a few others formulating a dairy cow replacement model.

This study is particularly connected with previous investigations by Giaevers (1966) and Kristensen (1982). However Smith (1971) and Reenberg (1979) have presented models too, but all authors mentioned only considered during which lactation to replace, but not when to replace within the lactation.

Chapter 3 Material

The parameters of the model were estimated from records concerning milk yield, calvings and inseminations. Records were available for about 10.500 lactations deriving from 37 dairy herds, which are involved in research by the National Institute of Animal Science.

Chapter 4 The model and the basic assumptions

The theoretical aspects mainly of mathematical and statistical nature are described separately in appendix A. In chapter 4 a dairy cow replacement model is specified in accordance with the theory of the appendix.

Time is represented by stages of various lengths. A stage ends and a new one is initiated either 12, 24, and 36 weeks after each calving, or when a cow is replaced.

It is assumed that a cow is totally characterized by its state, which is defined by the following 4 state variables.

Lactation number, which is allowed to vary from 1 to 4. If it is decided to keep the cow 36 weeks after the 4th calving, then it is kept until 36 weeks after the 5th calving, where it always is assumed to be replaced because of age.

Weeks after calving: 12, 24 or 36 weeks.

Class of milk yield. There are 5 classes in 1st and 4th lactation and 6 in 2nd and 3rd. This variable is a linear combination of milk yield during present and all preceding lactations. The distribution of the classes is shown in table 4.1.

Length of calving interval. This variable is simplified to include only 4 values, which are 11, 13, 15 or 16.5 months. If the calving interval is even longer, it is assumed that the cow is always replaced because of reproductive problems.

Combinations of these 4 variables define 176 states. Further state number 177 is defined as a situation, where an old cow is replaced by a heifer. The possible combination of the 4 variables are shown in table 4.2.

At the beginning of each stage a decision must be made. 4 alternative decisions are available:

Keep the cow.

Replace it at once.

Replace it in 4 weeks.

Replace it in 8 weeks.

The basic unit in the model is a single cow and its successors in the future. However, it is possible to adapt the results to a situation, where the basic unit is the dairy herd as a whole (see chapter 6).

The choice of state variables is made subject to the following main criteria. In the first place they must serve as an important basis of making decisions. In the second place it is desirable that there is a high correlation between values of the variables in successive stages.

The lactation number, the number of weeks after calving, and the class of milk yield satisfy both criteria, while the length of the calving interval only satisfies the former. Because of the limitation of the capacity of the computer language (SAS), it was not possible to include any other state variables than the 4 mentioned.

In the model the 308-days (44 weeks) milk yield is described by the following regression equation:

$$y_{an}^{44} = b_{no} + b_{n1}G_a + b_{n2} \cdot KI_{an} + u_{an}$$

where the b 's are regression coefficients associated with the n 'th lactation; G_a is the age-corrected herd average of the herd which the cow is a part of; KI_{an} is the length of the calving interval (in days) and u_{an} is a relative measure of the milk yield of the cow a during the n 'th lactation. The influence of KI_{an} is assumed only to exist when KI_{an} is less than 430 days. Inclusion of G_a in the regression makes it possible to optimize subject to the average level of milk yield of the herd.

u_{an} , however, is not suitable for direct use as a state variable because it does not satisfy the two conditions (A.38) and (A.39) in the appendix. Therefore it was necessary to define the state variable concerning milk yield as follows (where the specific cow is denoted α):

$$v_{\alpha n} = a_{n1}u_{\alpha 1} + a_{n2}u_{\alpha 2} + \dots + a_{nn}u_{\alpha n}$$

where the a 's are constants, which can be deduced in such way that the conditions mentioned are satisfied.

In dairy herds, however, cows are also replaced for reasons not concerning these state variables. Therefore probabilities that a cow is not replaced for reasons not concerning the 4 state variables are included in the model. These "probabilities of survival" are shown in table 4.3.

Chapter 5 Estimation of parameters

Three main types of parameters are included in the model, namely transition probabilities between states, economical returns during each stage, and finally discount factors for correction for time gaps between successive stages.

These main parameters are calculated by means of a number of basic parameters which are estimated directly from the empirical data described in chapter 3. The basic parameters are incorporated in the optimizing program together with necessary information like food intake, body weight, probabilities of survival, prices and rate of interest.

The main parameters are not calculated until the optimizing program is running. This means that it is possible to change the basic parameters or information like prices and rate of interest individually without affecting the program in other respects.

Chapter 6 Optimization and results

In the appendix two algorithms for optimizing the model are discussed. In the present case, however, the so-called Policy-Iteration algorithm, is chosen, because it is the most efficient one. The computer language SAS (Statistical Analysis System) was used for programming the model.

The basis of the program is a data set containing the following informations about each cow:

- 1) Herd number.
- 2) Cow number.
- 3) Lactation number.
- 4) Milk yield (308 days FCM) of all preceding lactations.
- 5) Expected milk yield (308 days FCM) of present lactation.
- 6) Dates of all calvings.
- 7) Date of latest insemination during present lactation.
- 8) Date of latest record of milk yield.

First the state of each cow is calculated in the program. Then the parameters of the model are computed subject to the special prices, interest rate, and health conditions associated with the specific herd and the biological relations estimated in chapter 5.

Then the optimization itself follows as described in the appendix. The result is an optimal replacement policy, which supplies an optimal decision in each state. By means of the previous calculation of the states a list of the cows in the herd in question is written. For each cow the optimal decision and the economic loss, if a non-optimal decision is made is indicated.

Finally a priority list including all cows in the herd between 12 and 44 weeks after calving is written out. This list tells in which order the cows should be replaced.

In the tables B.12 to B.14 output concerning the farm H 64-2, April 1982 is shown. The prices and rate of interest used appear from table 6.1 and the text around it.

Table B.12 (optimal replacement policy) is mainly of theoretical interest and will not be send out to the dairy farmer. Table B.13 (optimal decisions concerning single cows), however, is of great practical interest, because it tells which decision is optimal from an economical point of view. Further it informs the dairy farmer of the economic loss if a non-optimal decision is made. By this he is able to decide, whether he is ready to accept the economic loss, if he -perhaps as a result of non-economic considerations- wants to deviate from the optimal decision (e.g. if a cow, which according to table B.13, should be kept, has got a very difficult temper).

Just as table B.13 the priority list shown in table B.14 will be send out to the dairy farmer. This list is very important, because it includes every cow between 12 and 44 weeks after calving, and because the order is the same, whether the cow is replaced by a heifer or the number of cows in the herd is reduced.

To test the stability of the results a number of sensibility tests were carried out. Assumptions concerning probabilities of survival, prices, and rate of interest were changed. The results are shortly presented in table 6.2.

It was concluded that only changes in probabilities of survival and in the price ratio between heifers and replaced cows exerted an appreciable influence on the optimal decisions. If prices of heifers and replaced cows, however, were changed proportionally then almost no decisions were affected. This is important because these prices usually are closely correlated.

Further the results of the sensibility tests confirmed the great importance of the priority list (table B.14), because it was almost unaffected by all changes.

Chapter 7 Discussion of the model, results and utility

All the results shown in table B.12 to B.14 are coherent which can be seen, when optimal decisions of different states are compared, as well as when the economic losses of different non-optimal decisions are compared. The changes of the optimal decisions are coherent, too.

When the model is optimized it is assumed that the prices and rate of interest once chosen will remain unchanged in the future. This is not realistic, but, however, the consequence is very small, partly because a proportional rise in all prices exerts no influence on the results, and partly because the inflation rate can be included in the interest rate. Further the sensibility tests have shown that the only fluctuations in prices that really matter are changes in the heifer/replaced cow price ratio. However, in practice such changes rarely occur. As regards the rate of interest it has been shown that changes hardly affect the results.

Consequently the assumption, that prices and rate of interest are con-

stant in the future, is no appreciable weakness.

Genetic improvement is not directly considered, however, it is included in an indirect manner, because the milk yield of heifers is always assumed to be normally distributed around the current yielding level of the specific herd. If milk yield generally is increasing over time as a result of genetic improvement, then average milk yield of heifers is assumed to increase proportionally.

In addition to the state variables chosen a variable concerning general state of health and one for body weight might be relevant. However, it has not been possible to include further state variables, partly because the number of states in that case would increase to a level far beyond the capacity of the computer language (SAS), and partly because additional records in the herds then will be necessary in practise. In the present model only those records, which are already performed in every danish dairy herd, are necessary.

The sensibility tests showed that the priority list (an example is shown in table B.14) is very stable, when prices, rate of interest, or probabilities of survival are changed. Even a change of the heifer/replaced cow price ratio hardly affects the order of the cows in the list. Further it does not depend on whether cows are replaced by heifers or the herd size is adjusted instead. These circumstances demonstrate that the priority list is the most essential output from the model. This is confirmed by the fact that it contains all cows, which are between 12 and 44 weeks after calving.

The model is easily adapted for the current prices, rate of interest and average health conditions of the specific herd. Further the average yielding level of the herd is automatically considered. It follows that the results are individual, and that they are adjusted closely to the single herd.

If knowledge about the parameters are increased in the future then they are easily adjusted without affecting the computer program in other respects.

The probabilities of survival are not estimated statistically but only assumed. Even if they seem rather realistic they ought to be estimated in the future.

The model will soon be put to use in some private dairy herds, which are involved in research by the National Institute of Animal Science.

1

INDLEDNING, PROBLEMFORMULERING OG MÅL

Enhver mælkeproducent står med mellemrum over for at skulle tage stilling til udskiftning af malkekører.

I en besætning er der således dyr, der løbende skal udskiftes, fordi de har for lav ydelse, har dårlige brugsegenskaber, ikke er blevet drægtige, er syge eller fordi nye kvier skal kælve, og pladsen er begrænset. Det er dog ikke uden videre givet, at alle kælvekvier fra eget opdræt bør indgå i besætningen, idet det undertiden kan være fordelagtigt at beholde køerne og i stedet sælge én eller flere kælvekvier. Omvendt er det også muligt at indkøbe kælvekvier, og dermed udsætte flere køer end antallet af egne kvier giver mulighed for.

Der må således tages stilling til, både hvor mange køer, der årligt skal udsættes (d.v.s. udskiftningsprocenten) og ikke mindst hvilke. Det er ikke umiddelbart muligt at afgøre, hvor stor udskiftningsprocenten bør være, idet der både er fordele og ulemper forbundet med eksempelvis en lav procent. Af fordele kan nævnes, at tilvækstværdien for køer af de tunge racer er ca. 400 kr. større pr. årsko, når der er 30% udskiftning fremfor 50%. (Hindhede 1982).

Dette kunne eventuelt animere til ensidigt, at reducere udskiftningen uden hensyn til bl.a. den positive effekt denne kan have på besætningens ydelsesanlæg, brugsmæssige egenskaber og antallet af fødte kalve. Der bør imidlertid sigtes mod en økonomisk optimal udskiftning, hvilket ikke kan ske på basis af en - for det lange sigt - planlagt optimal udskiftningsprocent for året.

Det er derimod afgørende, at der i den løbende udskiftning nøje tages stilling til, om den enkelte ko skal udsættes og hvornår under hensyntagen til renteniveauet og priser på mælk, foder, kælvekvier, udsætterkører og spædekalve samt forventet produktionsniveau og brugsmæssige egenskaber m.m. for den ko, som påtænkes udsat i forhold til den, der forventes indsats.

Målet med det foreliggende arbejde er at udvikle en praktisk anvendelig metode til bestemmelse af det optimale, individuelle udskiftnings-tidspunkt for de enkelte køer i en given besætning. Dette tidspunkt afhænger bl.a. af, hvilke forventninger der er til koens fremtidige præstationer. Forventningerne vil være bestemt af koens konstaterede

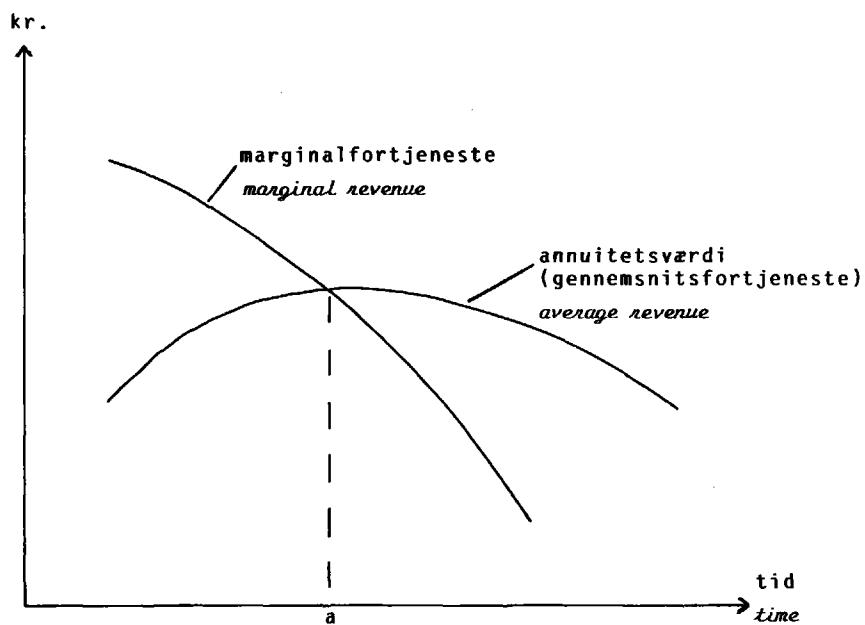
ydelse i indeværende og eventuelle tidligere laktationer, dens drægtighedsforhold, laktationsnummer, huld og almene sundhedstilstand. Disse forventninger vil i praksis blive afvejet mod forventningerne til den nye kvie (eller ko), der skal indsættes i stedet samt en række mere subjektive forhold som koens eksteriør (herunder yver- og patteform), malkbarhed og temperament.

Data fra gårde under Helårsforsøg med Kvæg tyder imidlertid på, at der lægges meget forskellige kriterier til grund for beslutning om udskiftning i de forskellige besætninger. I året 1980/81 var udskiftningsprocenten i gennemsnit for gårde med tunge racer (RDM og SDM) 52%, hvilket imidlertid dækker over en spredning mellem gårde på 15%, medens hele variationsområdet var mellem 37% og 106%. For jersey er udskiftningen gennemgående mindre - således konstateredes procenter mellem 24 og 45.

En høj udskiftningsprocent indebærer både fordele og ulemper. Med en kraftig ydelsesselektion vil den genetiske fremgang kunne øges. Den med selektionen forbundne høje udskiftning betyder til gengæld, at en større del af besætningen vil være 1. kalvskører, som har noget lavere ydelse end ældre køer (jvf. fig. 1.2). En meget væsentlig ulempe er, at hvis udskiftningsprocenten overstiger ca. 45, vil besætningen ikke kunne opretholdes ved selvrekruttering, idet det vil være nødvendigt at indkøbe kælvekvier. Dette medfører en risiko for indslæbning af smitte (mastitis, paratuberkulose etc.), ligesom indkøbte kviers ydelseskapacitet ikke kan forudsiges så præcist som for egne kvier, hvis afstamning kendes. Ved lav udskiftning, hvor der er overskud af egne kvier, vil det være muligt at sælge kælvekvier og/eller at lade de lavestydende køer inseminere med sæd fra kødracetyre og ad den vej få bedre slagtekalve. Omvendt vil der ved høj udskiftning fødes flere kalve pr. årsko.

Det er derfor meget vanskeligt på grundlag af disse modstridende fordele og ulemper at afgøre, hvilken udskiftningsprocent der er optimal. Selv om en sådan procent blev fastlagt gennem beregninger, ville det imidlertid kun fortælle driftslederen hvor mange køer, der burde udskiftes årligt, men derimod ikke hvilke. Målet med nærværende undersøgelse er imidlertid at udvikle metoder til også at besvare dette spørgsmål.

Problemet med bestemmelse af optimal udskiftning af malkekøer er noget mere kompliceret end de fleste andre udskiftningsproblemer. Hvis der eksempelvis er tale om et teknisk anlæg, er det i de fleste tilfælde forsvarligt at antage, at marginalfortjenesten (fortjenesten ved at beholde det eksisterende anlæg yderligere en periode) er en monoton aftagende funktion af tiden. Dette skyldes, at udbyttet under tiden falder som følge af slid og ølde samtidig med, at omkostninger til vedligeholdelse næsten altid stiger. Det optimale udskiftningstidspunkt kan da relativt enkelt bestemmes som værende, når marginalfortjenesten er lig med investeringens annuitetsværdi (gennemsnitsfortjenesten over tiden), såfremt der udskiftes til et nyt anlæg identisk med det gamle i en uendelig investeringeskæde (Rasmussen 1976). Dette princip er illustreret i fig. 1.1.



Figur 1.1 Optimalt udskiftningstidspunkt (angivet ved a) ved aftagende marginalfortjeneste.

Figure 1.1 Optimal replacement time (indicated by a) when marginal revenue is decreasing

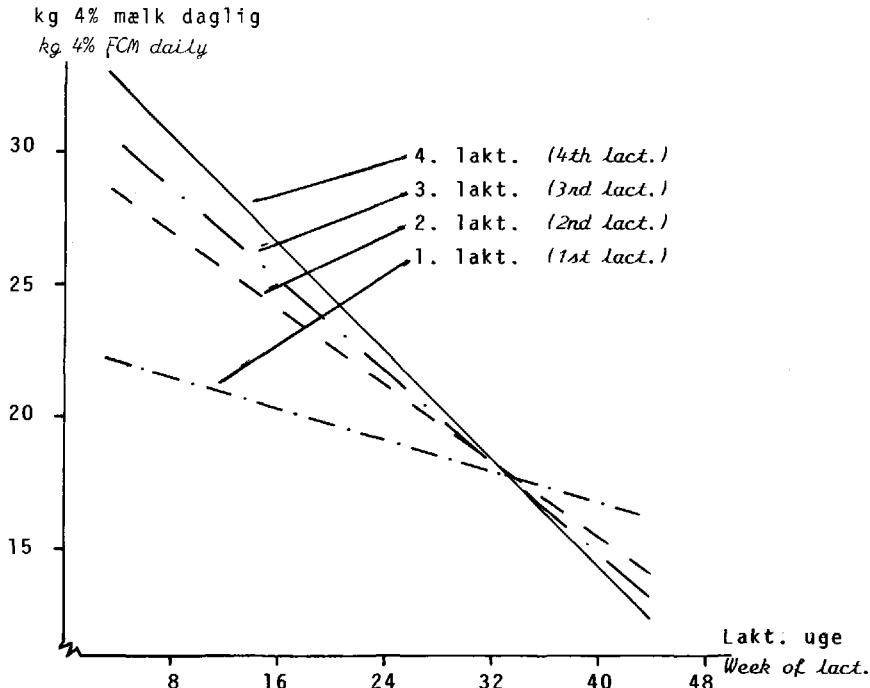
Marginalfortjenesten vil være lig med annuitetsværdien, når sidstnævnte antager sin maksimale værdi (jvf. figuren). At dette tidspunkt er det optimale for udskiftning kan indses af, at så længe fortjenesten ved at beholde det eksisterende anlæg yderligere én tidsenhed (marginalfortjenesten) overstiger gennemsnitsfortjenesten vil indtjeningen pr. tidsenhed kunne øges ved at beholde anlægget, hvormod den mindskes hvis marginalfortjenesten er mindre end gennemsnitsfortjenesten, idet den lavere indtjening i den sidste periode vil trække gennemsnittet ned.

På grund af malkekoens cykliske produktion med skiftevis goldperiode og kælvning med efterfølgende laktation, vil marginalfortjenesten over tiden være svingende idet både mælkeydelsen og tilvæksten afhænger af såvel laktationsnummer som - stadium (se figur 1.2 og 1.3). En fast regel om at udskifte, når marginal fortjenesten for f.eks. den næste måned når ned under et vist nærmere defineret niveau, er derfor uanvendelig, idet produktionen må forventes at stige kraftigt igen efter næste kælvning. På denne baggrund beskriver Giaeever (1966) udskiftning af malkekør som et todimensionalt problem, hvor den ene dimension er beslutning om, i hvilken laktation koen skal udskiftes, og den anden dimension er beslutning om, hvornår inden for denne laktation udskiftningen skal ske.

Er der således truffet beslutning om i hvilken laktation, der skal udskiftes, kan problemet om hvornår inden for laktationen imidlertid sammenlignes med den ovenfor skitserede situation med det tekniske anlæg, idet marginalfortjeneste hen gennem laktationen er faldende. Koen skal da udskiftes, når marginalfortjenesten når ned på et niveau svarende til den gennemsnitlige fortjeneste for den nye ko. Dette princip anbefales da også anvendt generelt (bl.a. Helårsforsøgs-gårdene) på grundlag af tabeller over dækningsbidrag under forskellige forudsætninger.

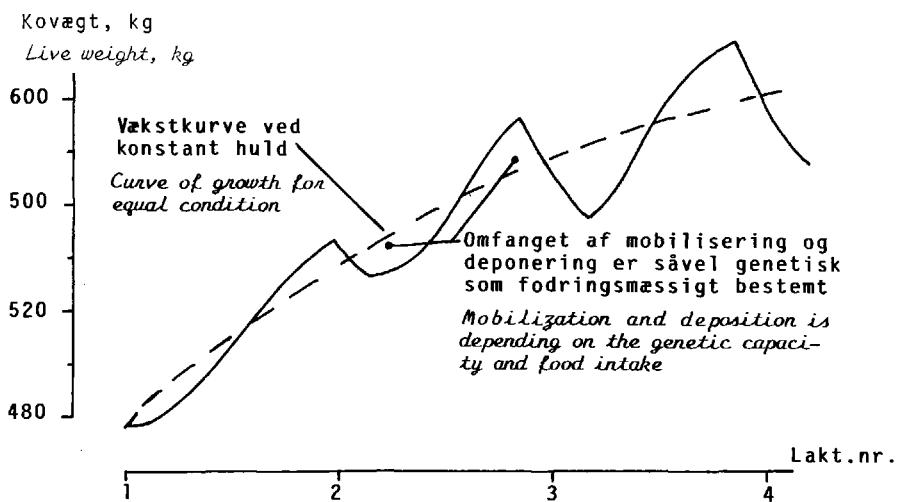
Enkelte eksempler er bragt som tabel 1.1 og 1.2. Princippet for brugen af disse tabeller er følgende:

Producentens styringsredskaber er foderniveau og afgangstidspunkt. I tabel 1.1 er således vist det daglige dækningsbidrag (aflønning til stald og arbejde) for køer af RDM og SDM ved forskellig mælkeydelse, tilvækst og fodereffektivitet ved tildeling af 13 FE dagligt.



Figur 1.2 Laktationskurver for 1., 2., 3. og 4. laktation.

Figure 1.2 Lactation curves of 1st, 2nd, 3rd, and 4th lactation.



Figur 1.3 Vækst- og vægtkurve for malkeko fra 1. til 4. kælvning.

Figure 1.3 Weight and growth of the dairy cow from 1st to 4th calving.

Tabel 1.1 Aflønning til stald og arbejde, kr. pr. dag (tunge racer) ved forskellig mælkeydelse, tilvækst og fodereffektivitet ved tildeling af 13 FE daglig.

Table 1.1 Net income to stable and labour, kr. per day (Red Danish and Friesian cows) at various levels of milk yield, body tissue gain, and food efficiency when feeding 13 SFU per day.

kr. pr. kg mælk	kr. pr. kg tilvækst	kg 4% mælk kg FCM	16	14	12	10	8	6
kr. per kg FCM	kr. per kg body tissue gain	kg tilv. kg b.t.g. ¹⁾	0,2	0,2	0,6	0,6	1,0	1,0
1,80	4,00		7,40	3,80	1,80	÷1,80	÷3,80	÷7,40
	6,00		7,80	4,20	3,00	÷0,60	÷1,80	÷5,40
	8,00		8,20	4,60	4,20	0,60	0,20	÷3,40
	10,00		8,60	5,00	5,40	1,80	2,20	÷1,40
	12,00		9,00	5,40	6,60	3,00	4,20	0,60
2,00	4,00		10,60	6,60	4,20	0,20	÷2,20	÷6,20
	6,00		11,00	7,00	5,40	1,40	÷0,20	÷4,20
	8,00		11,40	7,40	6,60	2,60	1,80	÷2,20
	10,00		11,80	7,80	7,80	3,80	3,80	÷0,20
	12,00		12,20	8,20	9,00	5,00	5,80	1,80
2,20	4,00		13,80	9,40	6,60	2,20	÷0,60	÷5,00
	6,00		14,20	9,80	7,80	3,40	1,40	÷3,00
	8,00		14,60	10,20	9,00	4,60	3,40	÷1,00
	10,00		15,00	10,60	10,20	5,80	5,40	1,00
	12,00		15,40	11,00	11,40	7,00	7,40	3,00

1) body tissue gain.

Forudsætninger: Foderpris 1,40 kr/FE; Diverse 1,50 kr/dag; Renter (køen) 2,50 kr/dag.

Assumptions : Food price 1.40 kr/SFU; Miscell. costs 1.50 kr per day; Interests 2.50 kr per day.

I appendiks B er vist yderligere et antal tabeller svarende til andre foderniveauer og priser. I tabel 1.2 er endvidere vist det daglige dækningsbidrag i goldperioden ved forskellige tilvækstværdier og en fodertildeling på 5,5 FE dagligt. Prisforudsætninger m.v. er angivet under tabellerne. Såfremt f.eks. prisen pr. fodérenhed er 10 øre højere end forudsat, må alle tal i tabel 1.1 mindskes med $13 \text{ FE} \times 0,10 \text{ kr/FE} = 1,30 \text{ kr}$ eller tilsvarende $5,5 \text{ FE} \times 0,10 \text{ kr/FE} = 0,55 \text{ kr}$ i tabel 1.2.

Ved bestemmelse af foderprisen ansættes kraftfoder og andet indkøbt foder til købspris, medens hjemmeavlet grovfoder ansættes til alternativ værdi (= værdien i bedste anden anvendelse). Med rigeligt grovfoder kan prisen derfor blive lav i forhold til korn, medens den i knaphedssituationen kan blive betydelig højere end korn, da køer i begyndelsen af laktationen, i denne situation betaler over kraftfoder-/kornprisen. Kraftfoderprisen bliver dog den højeste pris udsætterkoen skal betale da den i knaphedssituationen med fordel fodres med halm og kraftfoder (evt. andet indkøbt foder).

Hvad angår mælkeprisen anvendes den øjeblikkelige med mindre den forventes at ændre sig, f.eks. i forbindelse med sæsondifferentiering.

Den øjeblikkelige samt forventede afregningspris pr. kg levende vægt bruges til at fastlægge marginalprisen (kr. pr. kg tilvækst). Antag således, at en ko vejer 550 kg og kan afregnes med 9,50 kr. pr. kg levende vægt - ialt 5225 kr. Er der forventning om prisstigning samt bedre salgetekvalitet, hvis koen beholdes til den vejer 600 kg, vil den måske kunne afregnes til 10,00 kr., hvorved den totale pris bliver 6000 kr. Marginalprisen pr. kg tilvækst bliver $(6000 - 5225) / (600 - 550) = 15,50 \text{ kr}$. Omvendt hvis prisen i mellemtíden er faldet 50 ører bliver prisen 5400, hvilket bevirket at marginalprisen kun bliver $(5400 - 5225) / (600 - 550) = 3,50 \text{ kr}$.

De under tabellerne anførte renteudgifter dækker forrentningen af den kapital, der er bundet i koen. Udgangspunktet er renten på kassekredit eller evt. leverandørkredit. Er værdien af koen således 5500 kr og den årlige rente 20% svarer det til en årlig forrentning på 1100 kr eller pr. dag 3,00 kr. Ved brug af tabellerne må således alle tal korrigeres med differencen mellem den aktuelle og den forudsatte daglige renteudgift, såfremt forskellen er væsentlig.

Tabel 1.2 Aflønning til stald og arbejde, kr. pr. dag (tunge racer) ved forskellig tilvækstværdi for goldkører ved tildeling af 5,5 FE pr. dag.

Table 1.2 Net income to stable and labour, kr. per day (Red Danish and Friesian cows) at various values of body tissue gain when feeding 5.5 SFU per day. (Dry cows).

Tilvækstværdi, kr Value of body tissue gain, kr.	Golddage (No. of days dry)		
	90	120	150
500	÷ 6,10	÷ 7,50	÷ 8,40
1000	÷ 0,60	÷ 3,40	÷ 5,00
1500	5,00	0,80	1,70
2000	10,50	5,00	1,60

Forudsætninger: Som tabel 1.1.

Assumptions : As table 1.1.

Det optimale udskiftningstidspunkt er da, når det daglige marginale dækningsbidrag for en ko når ned under den alternative værdi af staldpladsen og arbejdskraften. Hvis der er en kælvekvie til rådighed, vil den alternative værdi være lig med den gennemsnitlige aflønning til stald og arbejde for denne kælvekvie. Som mål for den gennemsnitlige aflønning bruges tabellerne 3.11 til 3.17 i del A i 532. beretning fra Statens Husdyrbrugsforsøg.

Er der derimod ikke en kælvekvie til rådighed, vil pladsen stå tom, hvis koen udsættes. Den alternative værdi af staldpladsen og arbejdskraft vil da normalt være nul, hvilket betyder, at kun køer med negativt dagligt dækningsbidrag bør udsættes.

Denne metode giver imidlertid kun svar på, hvornår inden for en laktation en ko bør udskiftes - ikke om det evt. kan betale sig at beholde koen yderligere én eller flere laktationer, idet dækningsbidragsene i tabel 1.1 og 1.2 ikke omfatter forventningerne til koens ydelse og kælvninger i kommende laktationer. Metoden kan derfor kun bruges over for potentielle udsættere.

Imidlertid kan det volde store problemer at bestemme i hvilken laktion, koen bør udskiftes, idet dette kræver metoder til at omsætte oplysninger om koen til konkrete forventninger om fremtidige præstationer. Problemets kompliceret yderligere af, at de to dimensioner i udskiftningen indbyrdes hænger sammen. Såfremt spørgsmålet om "i hvilken laktion" søges løst særskilt, må beregningerne baseres på en fast antagelse om "hvornår i laktionen" der udskiftes. Dersom resultatet da bliver, at koen skal beholdes i den pågældende laktion, kan det skyldes, at der er valgt et forkert tidspunkt i laktionen for udskiftning, således at beregningerne - hvis de tog udgangspunkt i et andet tidspunkt i laktionen - ville føre til, at koen alligevel skulle udskiftes i den pågældende laktion.

Problemets to dimensioner skal derfor principielt løses sideløbende. I det følgende beskrives opbygningen af en matematisk model, som tager højde for dette, idet så vidt vides ingen tidligere har præstet metoder, der samtidigt tager højde for den kortsigtede og den langsigtede udskiftning.

En sådan model bliver imidlertid meget kompliceret, hvis flere aspekter skal inddrages, hvilket nødvendiggør brug af EDB ved optimeringen. Data vedrørende de enkelte besætninger (priser, renteniveau, ydelse, insemineringer, kælvninger m.v.) må derfor indberettes til central bearbejdning, hvilket bevirker, at der vil forekomme tidsforskydning mellem registrering af data og returnering af resultater, ligesom en hyppig indberetning af priser og rente næppe er hensigtsmæssig. I modsætning hertil har den mere enkle model, der ligger til grund for tabel 1.1 og 1.2, den fordel at beregningerne kan foretages af driftslederen selv, ligesom pludselige prisændringer straks kan tages i betragtning.

Det vil derfor i visse situationer (se Kap. 6) være hensigtsmæssigt, at supplere resultaterne fra den komplicerede model med aktuelle beregninger analogt med de tidligere omtalte i forbindelse med tabel 1.1 og 1.2, ligesom det er af afgørende betydning, at resultaterne fra den komplicerede model præsenteres på en overskuelig og letforståelig måde. Særligt i situationer, hvor udsætterkoen ikke straks skal erstattes af en kælvekvie, vil tabellerne i dette kapitel samt de analoge i appendiks B være nyttige som supplement til resultaterne fra den komplicerede model.

Ved modelformuleringen antages, at der kun indsættes kælvekvier, idet indkøb af ældre køer dels sjældent forekommer i praksis og dels er uheldigt på grund af det miljøskifte, som koen herved udsættes for.

En nødvendig forudsætning for at opstille en model er, at målet med produktionen er afgjort - eller med andre ord, at det er besluttet, efter hvilket kriterium, der skal optimeres.

For en besætning af malkekøer kan nævnes en række mål, der kan stræbes efter: Størst mulig genetisk fremgang - bedst mulige egenskaber - bedst muligt eksteriør - størst mulig indtjening etc. Nogle af de nævnte mål vil kun vanskeligt kunne udtrykkes kvantitativt, ligesom de i vid udstrækning beror på subjektive vurderinger. Derfor arbejdes i modellen udelukkende med størst mulig indtjening som optimumskriterium. Dog søges de økonomisk optimale løsninger præsenteret på en sådan måde, at driftslederen subjektivt bliver i stand til at afvæje andre ønskelige mål mod en eventuel mindre indtjening, der kan følge af at fravige det fundne resultat. Da indtjeningen foregår over lange tidsrum må alle ind- og udbetalinger diskonteres (tilbageføres) til samme udgangspunkt. Den diskonterede værdi af alle fremtidige nettoindbetalinger betegnes nutidsværdien og beregnes alment som:

$$f(0) = \sum_{t=0}^T v_t \cdot e^{-rt} \quad (1.1)$$

hvor $f(0)$ er nutidsværdien til tiden 0, v_t er den forventede nettoindbetaling til tiden t ($t = 0, 1, 2, 3, \dots, T$) og e^{-rt} er diskonteringsfaktoren (r = renten), når der regnes med kontinuert rentetilskrivning (for en omtale af dette se f.eks. Hjortshøj Nielsen og Stryg, 1976).

Optimumskriteriet bliver da at maksimere nutidsværdien.

RELATION TIL TIDLIGERE UNDERSØGELSER

Som én af de første inden for området opstillede Preinrich (1940) en almen teoretisk model for udskiftning, hvor det enkelte anlæg* betragtedes som et led i en kæde af anlæg. Refereret efter Rapp (1974) kan modellen formuleres som følger:

$$\underset{T}{\text{Max}} \quad f(T)$$

hvor:

$$f(T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-r n T} \cdot \left(\int_0^T N(t) e^{-rt} dt + S(T) e^{-rT} - I \right) \quad (2.1)$$

Her er T levetiden af det enkelte anlæg i kæden, $f(T)$ er nutidsværdien som funktion af levetiden, r er renten, n er anlæggets nummer i kæden, $N(t)$ er nettoindbetalingen som funktion af det enkelte anlægs alder t , $S(T)$ er scrapværdien af anlægget som funktion af levetiden (ved scrapværdien forstås anlæggets værdi, når det tages ud af drift), og I er prisen på et nyt anlæg. Leddene i parentesen udgør tilsammen nutidsværdien af et enkelt anlæg, når det anskaffes. Ved hjælp af faktoren $e^{-r n T}$ diskonteres disse bidrag fra de enkelte anlæg til kædens begyndelse (d.v.s. til $n = 0$), og slutteligt summeres de til $n = 0$ diskonterede enkeltbidrag, som tilsammen udgør nutidsværdien for hele kæden. Princippet er da, at levetiden af de enkelte anlæg (denne antages ens for dem alle) vælges, så nutidsværdien bliver størst mulig.

En sådan model er imidlertid ikke anvendelig til bestemmelse af optimalt udskiftningstidspunkt for malkekøer, idet nettoindbetalingen forudsættes at være en éntydig funktion af anlæggets alder, hvilket som nævnt medfører, at den optimale levetid bliver den samme for alle anlæg i kæden. Dette er en situation, som er meget forskellig fra den aktuelle med malkekøer, hvor der er store individuelle forskelle mellem de enkelte køer, hvad angår forventningen til de fremtidige præstationer. Derfor vil den optimale levetid variere meget fra ko til ko alt afhængig af de individuelle egenskaber. Ligeledes kan de fremtidige indbetalinger for den enkelte ko heller ikke betragtes som en éntydig funktion af alderen, idet der må tages hensyn til den stokastiske variation, når der udarbejdes prognoser.

*: Maskine, teknisk installation, malkeko etc.

Først med udviklingen af Dynamisk programmering, som skyldes Bellman (1957), skabtes et værktøj, som er tilstrækkeligt fleksibelt til, at sådanne stokastiske variationer (både mellem køer og ved prognosen for enkelte køer) kan inddrages. Denne meget vidtfavnende teknik kan meget kort karakteriseres ved følgende (jævnfør Hjortshøj Nielsen og Stryg 1976):

Et kompliceret optimeringsproblem opdeles i skridt (engelsk: stage), som enkeltvist lettere optimeres. Der findes da teknikker til at sammenkæde resultaterne fra de enkelte skridt til en samlet løsning på hele problemet. Disse teknikker vil ikke blive gennemgået her - i stedet henvises til Bellman (1957). Kendetegnende for metoden er endvidere følgende begreber:

Tilstand (engelsk: state). Herved forstås den situation, hvori det betragtede system befinner sig i et givet skridt. Denne tilstand er defineret ved en række tilstandsvariable, som antages fuldstændigt at karakterisere systemet. Overført til det konkrete tilfælde (hvor "systemet" er en ko) indebærer dette, at forskellige køer henføres til forskellige tilstande afhængig af ydelse, drægtighedsforhold m.v., hvorved der tages hensyn til variationen mellem køerne.

Beslutning. Herved forstås en bestemmelse om, i hvilken retning systemet ønskes, når det befinner sig i en bestemt tilstand. Til enhver tilstand hører således en række alternative beslutninger.

Bevægelseslov, som angiver regler for, hvordan systemet kan og vil skifte tilstand, efter at en vis tilslutning er truffet. Denne lov kan f.eks. bestå i en sandsynlighedsfordeling for de mulige tilstandsskift, hvorved der tages hensyn til den stokastiske variation, når der skal udarbejdes prognoser for det fremtidige forløb.

Udbyttefunktion, der her angiver udbyttet i kroner og regnet med fortegn i det enkelte skridt.

Dersom sandsynlighedsfordelingen for resultatet af et skridt er kendt, når det faktiske resultat af alle tidligere skridt foreligger, er der tale om en stokastisk proces, som er et specialtilfælde af dynamisk programmering.

En speciel type stokastiske processer betegnes Markovprocesser. Disse er kendetegnet ved, at sandsynlighedsfordelingen for resultatet

af et skridt kun afhænger af resultater af det umiddelbart foregående skridt. Nogle forfattere går videre og definerer Markovkæder, som en særlig form for Markovprocesser, men i denne fremstilling vil de to udtryk blive brugt synonymt. Teorien for optimering ved hjælp af Markovprocesser er udviklet af Howard (1960).

Litteraturen er yderst sparsom med hensyn til behandling af udskiftningspolitik på enkeltdyr-niveau, når det gælder malkekører. De fleste artikler, der behandler udskiftning, beskriver enten fordele og ulemper ved forskellige udskiftningsprocenter eller søger at finde frem til en optimal udskiftningsprocent, hvilket imidlertid ikke giver driftslederen, beslutningsgrundlaget for, om den enkelte ko skal udskiftes. Den første, der behandlede udskiftning med udgangspunkt i det enkelte dyr, var Giaever (1966), som gjorde brug af teorien for Markovkæder. Han udarbejdede en detaljeret model, hvor beslutningsgrundlaget (tilstandsvariablene) var laktationsnummer, ydelse og drægtighedsforhold. Sygdomsforhold var derimod ikke med i beslutningsgrundlaget, men indgik i form af sandsynligheder for at koen måtte udsættes på grund af forhold, som ikke vedrører laktationsnummer, ydelse og drægtighedsforhold. Det forudsattes i modellen, at frivillig udskiftning altid fandt sted 7 måneder efter kælvning, hvilket betyder, at der kun sigtedes på at afklare, i hvilken laktation koen skulle udskiftes - ikke hvornår inden for laktationen (jævnfør kapitel 1). Modellens parametre estimeredes på grundlag af mangeårige registreringer i to californiske Jersey-besætninger. På grund af det lille datamateriale er resultaterne ikke direkte anvendelige i praksis (hvilket forfatteren da også selv anfører) - og slet ikke under danske forhold. Endvidere er det en mangel, at den kortsigtede udskiftning (inden for laktationen) ikke er inddraget i modellen. Alligevel er der tale om en fremragende teoretisk behandling af problemet, og den i denne fremstilling præsenterede model kan betragtes som en videreudvikling af Giavers model.

Smith (1971) formulerede ligeledes udskiftningsproblemets som en Markovkæde-model. Også denne model inddrager kun de langsigtede beslutninger. Her er beslutningsgrundlaget laktationsnummer, ydelse og længden af foregående kælvningsinterval. Optimeringsteknikken er (som hos Giaever, 1966) den såkaldte "value-iteration" til forskel fra "policy-iteration" og lineær programmering (se f.eks. Kristensen 1982).

En tredje Markovkæde-model er udarbejdet af Reenberg (1979). Her er beslutningsgrundlaget kun laktationsnummeret, hvilket bevirker, at resultaterne kun har teoretisk interesse, idet eksempelvis ydelsen i praksis er af altafgørende betydning for beslutning om udskiftning.

Endelig skal nævnes, at Kristensen (1982) har givet en detaljeret teoretisk beskrivelse af en Markovkæde-model byggende på grundprincipperne fra Giaevers (1966). Hovedvægten er lagt på den matematisk-statistiske modelbeskrivelse og på de tre forskellige optimeringsteknikker, hvis egenskaber bevises, ligesom de alle tre afprøves ved praktiske EDB-kørsler. Ved indbyrdes vurdering af de tre teknikker konkluderedes, at de alle er anvendelige, men at policy-iteration normalt bør foretrækkes, idet det er langt den mest effektive (hurtigste) metode. Endvidere gives forslag til yderligere forbedringer og udbygning af modellen. Disse forslag er inddraget i modellen, der præsenteres i denne fremstilling, ligesom valget af optimeringsteknik også skyldes konklusionen fra Kristensen (1982).

Sammenfattende kan siges, at nærværende arbejde især har forbindelse til og derfor kan betragtes som en videreudvikling af tidligere undersøgelser udført af Giaevers (1966) og Kristensen (1982).

3

DATAMATERIALE

Materialet er indsamlet på 37 gårde under Helårsforsøg med kvæg i perioden 1. januar 1978 til april 1981 (ikke alle gårde har været med hele perioden). Det omfatter oplysninger om ca. 10500 laktationer fra kør af racerne RDM og SDM. Der er for hver enkel laktation registreret følgende oplysninger:

- 1) Gård
- 2) Ko nr.
- 3) Kælvningsnummer
- 4) Kælvningsdato
- 5) Dato for sidste inseminering
- 6) Ydelse ved hver enkelt kontrollering (kg mælk og procent fedt)

På grundlag af disse oplysninger er følgende beregnet og samlet i et datasæt, som har dannet udgangspunkt for estimation af parametrene i den opstillede model:

- 1) Gård
- 2) Ko nr.
- 3) Kælvningsnummer
- 4) Kælvningsinterval (hvis ikke koen er udsat i den betragtede laktation).
- 5) Antal dage fra kælvning til sidste inseminering i laktationen.
- 6) Den akkumulerede ydelse i kg 4% mælk (FCM) de første 12, 24, 36 og 44 uger efter kælvning (svarer til 84, 168, 252 og 308 dage).
- 7) Ydelsen (i kg 4% mælk) i hver enkelt 28 dages periode fra kælvning til goldning (dog maksimalt 17 28-dages perioder).

Punkt 6 og 7 er beregnet med udgangspunkt i ydelsen (kg 4% mælk) ved de enkelte kontrolleringer efter følgende fremgangsmåde: Først beregnedes ved lineær interpolation ydelsen på hver enkelt dag i laktationen (i perioden fra kælvning til første kontrollering regnedes med samme daglige ydelse som ved første kontrollering). Derefter summeredes disse konstruerede dagsydelser i de respektive perioder angivet under punkt 6 og 7.

I samtlige besætninger er der fodret efter det forenklede fodringsprincip. Det vil sige, at de første 24 uger er der fodret med konstant kraftfodertildeling og grovfoder ad libitum. I sidste del af laktationen er der tildelt kraftfoder efter såvel ydelse som ønsket huld.

MODELLEN OG DENNS FORUDSÆTNINGER

Eftersom det antages, at en del læsere ikke vil være interesseret i en detaljeret beskrivelse af det rent matematiske og statistiske grundlag, er dette bragt særskilt som appendiks A. Det følgende vil kunne læses uafhængigt af dette appendiks; men såfremt der ønskes en tilbundsgående forståelse af de rent teoretiske aspekter, bør det nævnte appendiks læses på dette tidspunkt umiddelbart før afsnit 4.1.

4.1 Specificering af en Markovkædemodel for udskiftning af malkekøer

A) Definition af et skridt:

Tidsforløbet illustreres i modellen ved skridt af forskellig længde. Et skridt slutter og et nyt begynder på følgende tidspunkter i laktationen: 12, 24 og 36 uger efter kælvning samt desuden altid, når en ko udskiftes. De skridt, der begynder 12 eller 24 uger efter kælvning vil således (såfremt koen beholdes) have en længde af 12 uger. Længden af de skridt, der begynder 36 uger efter kælvning, vil (hvis koen ikke udskiftes) strække sig 12 uger ind i næste laktation - for 4. laktations vedkommende dog til 36 uger ind i 5. laktation. Målt i uger vil disse sidstnævnte skridt derfor variere i længde alt efter, hvor langt kælvningsintervallet er.

B) Definition af en tilstand:

Det antages, at al relevant information om en ko er givet ved dens tilstand. Denne er defineret ved værdien af følgende 4 tilstandsvariabler, der er fundet at være de mest betydende:

1) Laktationsnummeret.

Denne variabel kan antage værdierne 1-4, hvilket betyder, at der er mulighed for at beholde koen til 36 uger ind i 5. laktation, idet det antages, at koen først udsættes på dette tidspunkt, såfremt det 36 uger efter 4. kælvning besluttes at beholde den. Skønt det i modellen forudsættes at ingen køer opnår mere end 5 laktationer, forekommer der naturligvis undertiden endnu ældre køer i praksis. Da modellen imidlertid kun omfatter køer af RDM og SDM er det procentvis meget få køer, der opnår en så høj alder, og da antallet af tilstade ville

øges væsentligt ved at tillade højere værdier af laktationsnummeret, besluttedes det at sætte det maksimale antal laktationer til 5, idet det anvendte EDB-sprog sætter en øvre grænse på 181 for antallet af tilstande.

2) Tidspunkt i laktationen.

Værdierne 12, 24 og 36 uger efter kælvning forekommer.

3) Ydelsesniveau.

Modellen opbygges med 5 niveauer i 1. og 4. laktation og 6 i 2. og 3. Der er valgt en grovere inddeling i laktation 1 og 4, på grund af den tidligere nævnte begrænsning i antallet af tilstande. Disse niveauer defineres relativt i forhold til det konkrete ydelsesniveau i besætningen. Det er derfor ikke muligt at angive absolute grænser for disse niveauer, men i tabel 4.1 er vist frekvensfordelingen for det enkelte niveau opdelt efter laktationsnummer.

Tabel 4.1 Frekvensfordeling for ydelsesniveauer.

Table 4.1. Distribution of classes of milk yield.

Niveau Class	Laktationsnummer (Lactation number)			
	1	2	3	4
1	1/6	1/6	1/6	1/6
2	1/6	1/6	1/6	1/6
3	1/6	1/6	1/6	1/6
4	1/4	1/6	1/6	1/4
5	1/4	1/6	1/6	1/4
6	-	1/6	1/6	-

Denne tilstandsvariabel volder imidlertid problemer, fordi ydelsen ikke direkte opfylder de betingelser, en Markovkæde stiller med hen-syn til uafhængighed af alle tidligere skridt med undtagelse af det umiddelbart forudgående - se i øvrigt kapitel 2 (eller evt. afsnit A.2. i appendiks A). Det har derfor været nødvendigt at definere tilstandsvariablen som en linearkombination af den faktiske ydelse i indeværende og alle tidligere gennemførte laktationer. Ved en linearkombination forstas et udtryk af typen $v_n = a_{n1}u_1 + \dots + a_{nn}u_n$, hvor a'

erne er konstanter, og u_i ($i = 1, \dots, n$) er et mål for ydelsen i den i 'te laktation. Endelig er v_n den således definerede tilstandsvariabel for mælkeydelse i n 'te laktation (se app.A). Således indgår i hovedmodel-
len en særlig ydelsesmodel, som beskrives nærmere i afsnit 4.2.

4) Kælvningsintervallets forventede længde (KI).

Da variablen udtrykker tidsrummet fra sidste kælvning til næste forventede kælvning, vil den være forbundet med en vis usikkerhed, idet tids-
punktet for næste kælvning ikke kendes eksakt. Usikkerheden vil dog
være lille, hvis koen er insemineret og ikke er omløbet, eller den er
erklæret for drægtig. For nemheds skyld vil variablen i det følgende
kort blive omtalt som "kælvningsintervallets længde" eller blot "kælv-
ningsintervallet". Når disse udtryk benyttes som betegnelse for til-
standsvariablen, er det altså underforstået, at der er tale om en for-
ventet størrelse.

Denne variabel kan antage værdien 11, 13, 15 eller 16,5 måneder. Så-
fremt tidspunktet i laktationen er 12 uger efter kælvning, er kælvnings-
intervallets længde sjældent kendt, hvorfor variablen bortfalder i den-
ne situation. Ved 24 uger efter kælvning vil det vides, om KI er 11,
13 eller derover, således at der bliver tre alternativer. Først ved 36
uger er det muligt at skelne mellem alle fire alternativer. KI kan også
overstige 16,5 måneder eller reelt 17, da 16,5 svarer til "mellem 16
og 17", men da antages, at koen altid udskiftes på grund af frugtbarheds-
problemer. (I den konkrete beslutningssituation i en given besætning
kan koen beholdes, hvis særlige forhold gør sig gældende (se kap. 6.)).

I alt findes $1+3+4 = 8$ mulige kombinationer af variablene "tidspunktet
i laktationen" og "kælvningsintervallets længde". Dette betyder,
at alle 4 tilstandsvariable tilsammen definerer $4 \times 8 \times 5 = 160$ tilstande,
hvis der regnes med 5 ydelsesniveauer i alle laktationer. Det 6. niveau
i 2. og 3. laktation skaber $8+8 = 16$ ekstra tilstande, så det samlede
antal bliver 176. Desuden er en 177. tilstand defineret ved, at en ko
udskiftes og en kælvekvie sættes ind. Et skridt, hvori systemet er i
177. tilstand, vil strække sig fra udsætningstidspunktet til 12 uger
ind i den nye kvies første laktation, d.v.s. 16 uger ialt, da der reg-
nes med 4 uger fra koens udsætning indtil kælveviens kælvning.

I tabel 4.2 er vist en oversigt over de 4 tilstandsvariable med de
forskellige kombinationer af værdier angivet.

Tabel 4.2 Tilstandsvariablene og de mulige kombinationer af værdier.

Table 4.2 The state variables and the possible combinations of values.

Laktationsnummer	Tidspunkt i laktationen	Ydelses-niveau	Kælvnings-interval
Lactation number	Time of lactation	Class of milk yield	Calving interval
1	12 uger (weeks)	1-5	ukendt (unknown) 1)
1	24 -	1-5	11, 13, ukendt (unknown)
1	36 -	1-5	11, 13, 15, 16,5
2	12 -	1-6	ukendt (unknown) 1)
2	24 -	1-6	11, 13, ukendt (unknown)
2	36 -	1-6	11, 13, 15, 16,5
3	12 -	1-6	ukendt (unknown) 1)
3	24 -	1-6	11, 13, ukendt (unknown)
3	36 -	1-6	11, 13, 15, 16,5
4	12 -	1-5	ukendt (unknown) 1)
4	24 -	1-5	11, 13, ukendt (unknown)
4	36 -	1-5	11, 13, 15, 16,5

1) 14 eller mere. (14 or more)

C) Specificering af de mulige beslutninger:

Straks efter overgangen til et nyt skridt kan systemet (koen) henføres til netop én af de 177 tilstade defineret under punkt b. Afhængigt af tilstanden skal da træffes én af følgende beslutninger:

1) Behold koen.

Vælges denne beslutning, vil processen gennemløbe skridtets fulde længde og derefter gå videre til en anden tilstand i det næste skridt.

Sæfremt systemet der kommer i tilstand 177, er det udtryk for, at koen på trods af beslutningen "behold", alligevel er blevet ufrivilig utsat på grund af alder, ufrugtbarhed, sygdom ect. En sådan ufri-villig udskiftning antages altid at finde sted ved slutningen af et skridt.

2) Udskift straks koen med en kælvekvie.

I denne situation går processen straks videre til tilstand 177 (ud-skiftningstilstanden) og skridtlængden vil være nul.

3) Udskift koen med en kælvekvie om 4 uger.

Med en sådan beslutning vil systemet de første 4 uger følge nøjagtigt det samme mønster, som hvis beslutning 1 (behold) var valgt. Efter de 4 uger går systemet videre til tilstand 177, så skridtlængden bli-ver 4 uger.

4) Udskift koen med en kælvekvie om 8 uger.

Dette får samme konsekvens som ved beslutning 3 med undtagelse af, at overgangen til tilstand 177 først sker efter 8 uger, som her er skridtets længde.

4.1.1 Kommentarer til modellen

En proces (Markovkæde) udgøres af en ko og dens succesive efterfølge-re i al fremtid. I en besætning med 50 køer vil der således være 50 sideløbende Markovkæder. Det betyder, at modellen må forudsætte kon-stant besætningsstørrelse, idet en ko altid beholdes eller erstattes af en ny. I et senere kapitel vises dog, at modellens resultater kan bearbejdes på en sådan måde, at de også giver værdifuld vejledning, selv om en ko ikke nødvendigvis skal erstattes af en kvie, men be-sætningsstørrelsen i stedet reguleres.

Som det fremgår vil skridtlængden variere mellem nul og op til en hel laktationscyklus (hvis der 36 uger efter 4. laktation besluttes at be-holde koen til 36 uger efter 5. kælvning). Imidlertid vil skridtlæng-den altid være fastlagt, når tilstand og beslutning kendes. Dette for-hold udnyttes senere, når resultater fra forskellige skridt skal dis-konteres til samme tidspunkt, idet skridtlængden og beslutningen sam-men med den givne rentefod da én tydigt definerer diskonteringsfakto-ren.

Noget af det mest afgørende ved modelformuleringen er valget af tilstandsvariable, som bør foretages efter følgende hovedkriterier: For det første skal de danne det bedst mulige grundlag for at træffe beslutninger om koens fremtidige skæbne, og for det andet er det ønskeligt, at de giver et godt udgangspunkt for at forudsige tilstanden i næste skridt.

Den første af de fire valgte variable (laktationsnummeret) opfylder begge kriterier. Koens alder (udtrykt ved laktationsnummeret) har stor betydning både for ydelsen og holdbarheden (restlevetiden). Det er derfor oplagt at denne variabel bør være med i beslutningsgrundlaget. Det andet kriterium er perfekt opfyldt, idet laktationsnummeret kan forudsiges i næste skridt med absolut sikkerhed, såfremt koen beholdes.

Den anden variabel (tidspunkt i laktationen) er ligeledes udvalgt under hensyn til begge kriterier. Da dagsydelsen er stærkt afhængig af tidspunktet i laktationen, må dette tidspunkt være af afgørende betydning for beslutningen. Endvidere gælder som ved laktationsnummeret, at variablens værdi i næste skridt med sikkerhed kan forudsiges, hvis koen beholdes.

Hvad angår den tredje variabel (ydelsesniveauet), er der tale om en meget væsentlig faktor, når der træffes beslutninger, idet mælken er hovedindtægtskilden i et malkekøghold. Endvidere er ydelsen i de forskellige laktationer og i forskellige laktationsafsnit relativt højt korreleret (se afsnit 5.1.2 vedrørende resultaterne fra de empiriske undersøgelser), hvorfor niveauet i indeværende skridt givet et godt grundlag for at forudsige niveauet i næste skridt. Også denne variabel opfylder altså begge kriterier.

For den sidste variabel (kælvningsintervallets længde) gælder derimod, at den kun er udvalgt på grundlag af det første kriterium. Jo længere kælvningsintervallet er, jo længere tid går der, før der fødes en kalv, og før koen opnår den dermed forbundne højere ydelse. Det er derfor indlysende, at denne variabel har betydning for beslutningen. Derimod er sammenhængen mellem længderne af en ko's forskellige på hinanden følgende kælvningsintervaller meget svag. Som en konsekvens heraf antages i modellen, at der overhovedet ingen sammenhæng er. Derfor anvendes i hver laktation en fast sandsynlighedsfordeling for kælvningsintervallets længde uafhængigt af tilstanden i foregående skridt.

Ovenstående overvejelser godtgør, at de valgte tilstandsvariable er relevante at have med i modellen, hvilket imidlertid ikke udelukker, at der findes andre, der også burde indgå. I den forbindelse ville eksempelvis koens kropsvægt (som både er relateret til ydelse og slagteværdi) og ikke mindst koens almene sundhedstilstand være relevant.

På grund af den tidligere nævnte maksimumsgrænse på 181 tilstande, har det dog af praktiske grunde været nødvendigt at begrænse antallet af tilstandsvariable til de fire oprindeligt omtalte, som definerer 176 tilstande. En forøgelse med én ekstra variabel, der f.eks. kunne antage 3 værdier, ville øge antallet af tilstande til $3 \times 176 = 528$, hvilket er langt over EDB-sprogets kapacitet. Dette illustrerer, at hvis en ekstra variabel skulle inddrages, måtte en anden nødvendigvis udgå. Spørgsmålet er da, om der eksisterer en variabel, der er mere væsentlig end én af de fire valgte. Især koens sundhedstilstand ville kunne komme på tale; men her opstår det praktiske problem, at sundheden vanskeligt kan kvantificeres, idet der ikke findes noget objektivt sundhedsmål, som kan udtrykkes ved et tal. Derfor valges i lighed med både Giaevers (1966) og Reenberg (1979), at lade udsetning som følge af død, kastning, sygdom og andre uforudsigelige hændelser indgå i modellen på en stokastisk måde i form af sandsynligheder for, at koen udgår af disse årsager.

Med den formulerede model er der opnået stor fleksibilitet i beslutningsprocessen, idet der er mulighed for at udsætte en ko 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 og 44 uger efter kælvning. Der er således taget højde for både den kortsigtede og den langsightede udskiftning (problemets to dimensioner som formuleret i kapitel 1).

4.2 Ydelsesmodel

Laktationsydelsen hos en ko påvirkes af faktorer, som allerede er forklaret ved andre tilstandsvariable (laktationsnummer og kælvningsinterval). Det vil derfor senere lette beregningen af overgangssandsynligheder, hvis ydelsesvariablen renses for disse effekter, sådan at de forskellige tilstandsvariable kan betragtes som uafhængige. Endvidere vil et relativt mål, hvor ydelsen udtrykkes som afvigelse fra besætningsgennemsnit, være at foretrække, idet alle køer inklusive nyindsatte kvier da vurderes i forhold til besætningens ydelses-

niveau i stedet for i absolutte tal. I så fald vil det nemlig være muligt at optimere ved forskellige ydelsesniveauer i forskellige besætninger, idet der udmarket kan være forskel på den optimale udskiftningspolitik i en højtydende besætning i forhold til en lavtydende.

Derfor opstilles følgende ydelsesmodel:

$$y_{an}^{44} = b_{no} + b_{n1} \cdot G_a + b_{n2} \cdot KI_{an} + u_{an} \quad (4.1)$$

-hvor:

y_{an} er 308 dages (44ugers) ydelse i kg 4% mælk for koen a i laktation n.

b_{no} , b_{n1} og b_{n2} er konstanter hørende til laktation n.

G_a er alderskorrigert (til 3. og senere laktationer) besætningsgennemsnit for den besætning koen tilhører. Korrektionen for alder sker ved at multiplicere ydelsen i 1. og 2. laktation med faktorer, der angiver forholdet mellem middelydelsen i de senere laktationer og henholdsvis 1. og 2. laktation. Hensigten er at få et mål, der ikke afhænger af besætningens aldersfordeling.

KI_{an} er kælvningsintervallets længde i dage for koen a i laktation n.

u_{an} er da et relativt mål for koen a's ydelse i laktation n efter korrektion for G_a , KI_{an} og laktationsnummeret.

Besætningsgennemsnittet G_a er et mål for kvaliteten af avlsmaterialet, den fodring, den pasning og det miljø koen udsættes for, idet ydelsen må antages at være størst i de besætninger, hvor disse forhold er i orden. Ved at specificere G_a , får man ved optimeringen en løsning der bygger på netop de forudsætninger, som den enkelte besætning producerer under.

Hvis kælvningsintervallet er kort, vil koen være blevet drægtig tidligt i laktationen. Eftersom drægtighed -efter nogen tid (Auran 1974)- har negativ indflydelse på ydelsen, må der alt andet lige forventes laveste 308 dages ydelse ved kort kælvningsinterval. I midlertid er det også klart, at hvis kælvningsintervallet er tilstræk-

keligt langt vil den negative effekt efterhånden forsvinde. Det er således åbenbart, at i den ekstreme situation, hvor en ko først bliver drægtig senere end laktionens 308. dag (svarende til et forventet kælvningsinterval på over 588 dage), vil drægtigheden ikke øve indflydelse på 308 dages ydelsen. Så om KI_{an} f.eks. er 588 eller 650 vil være uden betydning for y_{an}^{44} . De første måneder af drægtigheden vil der dog heller ikke være nogen påvirkning af ydelsen, så det er åbenbart, at den øvre grænse for indvirkning vil være væsentligt mindre end 588 dage.

Undersøgelser af Auran (1974) viser således, at ny drægtighed ikke belaster ydelsesniveauet de første ca. 20 uger efter kælvning. Dette betyder, at hvis ikælvningen sker senere end ca. $44 - 20 = 24$ uger efter sidste kælvning, vil der ikke være nogen indflydelse på 308 dages ydelsen. Ikælvning på dette tidspunkt svarer til et kælvningsinterval på ca. $24 \times 7 + 280 = 448$ dage. Imidlertid vil der næppe være tvivl om, at ydelsespåvirkningen vil være meget lille de første 2 - 3 uger efter 20. drægtighedsuge, så den fejl der evt. begås ved at sætte den øvre grænse til f.eks. 430 dage i stedet for 448 vil være minimal. I modellen går grænsen for om tilstandsvariablen for kælvningsintervallets længde antager værdien 13 eller 15 måneder nemlig ved 427 dage. Afrundes dette fås 430 dage, og anvendes dette som øvre grænse, opnås at den forventede 308 dages ydelse ikke afhænger af, om koen er i en tilstand, hvor kælvningsintervallets længde er 15 eller 16,5 måneder. Derfor antages i modellen at KI_{an} kun har betydning, hvis den er mindre end 430 dage. Er kælvningsintervallet længere sættes KI_{an} alligevel til 430 dage.

Som mål for den korrigerede ydelse anvendes u_{an} , hvilket imidlertid volder problemer, fordi denne variabel ikke opfylder Markovkæde-kravet om uafhængighed af alle tidligere skridt med undtagelse af det umiddelbart foregående. Det har derfor været nødvendigt at definere tilstandsvariablen for ydelse i n'te laktion for koen α som følger:

$$v_{\alpha n} = a_{n1}u_{\alpha 1} + a_{n2}u_{\alpha 2} + \dots + a_{nn}u_{\alpha n} \quad (4.2)$$

-hvor konstanterne (a 'erne) i linearkombinationen kan fastlægges på en sådan måde, at den nævnte betingelse er opfyldt.

Alle teoretiske aspekter vedrørende linearkombinationen (4.2) og ydelsesmodellen (4.1) i det hele taget er detaljeret beskrevet i appendiks A (afsnit A.2).

4.3 ØVRIGE MODELFORUDSÆTNINGER

Når en ko udsættes, antages at den altid erstattes af en kælvekvie. Imidlertid er det ikke sikkert, at en sådan kvie findes på bedriften, ligesom den - selv om den er til stede- næppe vil kælve på nøjagtig samme tidspunkt, som den gamle ko udsættes. Ligeledes er det oftest fordelagtigt at placere kælvevien blandt kørerne ca. 3 uger før forventet kælvning. Derfor antages i modellen, at der gennemsnitligt vil gå 4 uger, før en ny kvie er tilvejebragt (ved indkøb eller eget tillæg) og er klar til kælvning.

Som nævnt i afsnit 4.2 multipliceres 1. og 2. laktationsydelserne ved beregning af det alderskorrigerede besætningsgennemsnit med en korrektionsfaktor svarende til forholdet mellem middelydelse i 3. og senere laktioner og middelydelse i henholdsvis 1. og 2. laktation. På grundlag af erfaringer fra tidligere arbejde regnes med følgende forholdstal for middelydelse i henholdsvis 1., 2. og senere laktioner: 100, 110 og 115, hvilket resulterer i korrektionsfaktorer på $115/100 = 1,15$ for 1. laktation og $115/110 = 1,045$ for 2. laktation.

Som omtalt i afsnit 4.1.1 inddrages udsætning på grund af forhold som sygdom, død, kastning etc. på en stokastisk måde i modellen. Dette sker ved at definere såkaldte overlevelsessandsynligheder, som angiver sandsynligheder for at koen i forskellige perioder af sit liv ikke udsættes af sådanne ufrivillige årsager. Således vil der være en overlevelsessandsynlighed for perioden fra indsætning til 12 uger efter 1. kælvning, en anden for periode 12 til 24 uger efter 1. kælvning osv. i overensstemmelse med afgrænsningen af de successive skridt. Det må antages, at sandsynlighederne for "overlevelse" falder med stigende laktationsnummer, og endvidere at de er mindst i skridt, hvor der finder en kælvning sted.

Det er således relativt enkelt at forudsige disse sandsynligheders omrentlige inddybdes størrelsesforhold, hvorimod en egentlig estimation af de absolutte værdier er meget kompliceret, især på grund af problemer med at henføre en udskiftning af en ko til én bestemt årsag. Ved Helårsforsøg med kvæg arbejdes der på at løse disse problemer. I tilfælde af sygdom vil koen eksempelvis ofte have en lav ydelse (som følge af sygdommen). Spørgsmålet er da om koen er utsat på grund af sygdom eller på grund af lav ydelse.

På grund af disse praktiske problemer valgtes at skønne værdier af overlevelsessandsynlighederne i overensstemmelse med de ovenfor skitserede inddybdes sammenhænge mellem disse. Derfor defineredes 3 sæt svarende til god, middel og dårlig sundhedstilstand.

Tabel 4.3 angiver disse skøn, som vil blive anvendt i modellen, idet de viste sig at føre til 3 typiske udskiftningsniveauer svarende til henholdsvis et mindre overskud af kælvekvier, netop selvrekruttering og et mindre underskud af kælvekvier.

Modellen programmeres da på en sådan måde, at et hvilket som helst sæt af overlevelsessandsynligheder vil kunne indsættes, hvilket betyder, at når den fornødne analyse og estimering på et senere tidspunkt er gennemført, vil eventuelt nye sandsynligheder uden videre kunne indsættes i programmet i stedet for de i tabel 4.3 viste.

Tabel 4.3 Skønnede overlevelsessandsynligheder svarende til gode, middel og dårlige sundhedsforhold.

Table 4.3 Assumed probabilities of survival, when health conditions in the herd are good, mean and bad respectively.

Periode (Period)		Sundhedsforhold (Health conditions)		
Lakt. nr.	Uger Weeks	Gode Good	Middel Mean	Dårlige Bad
1	til og med 12.	,985	,970	,955
1	13.-24.	,995	,990	,985
1	25.-36.	,975	,950	,925
1/2	37.-12.	,970	,940	,910
2	13.-24.	,990	,980	,970
2	25.-36.	,950	,900	,850
2/3	37.-12.	,955	,910	,865
3	13.-24.	,985	,970	,955
3	25.-36.	,925	,850	,775
3/4	37.-12.	,940	,880	,820
4	13.-24.	,980	,960	,940
4	25.-36.	,900	,800	,700
4/5	37.-36.	,810	,680	,550
Udskiftningsprocent Replacement percent		1) 38	45	54

1) Beregnet på grundlag af ydelsesniveau på H 64-2 og de i afsnit 6.2 viste standardforudsætninger.

Calculated by means of average milk yield at the farm H 64-2 and the prices and interest rate shown in section 6.2.

ESTIMATION AF PARAMETRE

Som beskrevet i appendiks A indgår i modellen 3 typer hovedparametre, nemlig overgangssandsynligheder mellem tilstande, økonomiske udbytter i de enkelte skridt og endelig diskonteringsfaktorer til korrektion for tidsforskellen mellem de forskellige skridt i kæden. I dette kapitel vil disse parametre blive estimeret.

5.1 Overgangssandsynligheder

For hele afsnit 5.3 gælder, at der er tale om præsentation af meget store mængder empiriske resultater tæt knyttet til den teoretiske fremstilling i appendiks A. De mange tabeller repræsenterer dokumentationen for overgangssandsynlighederne og er kun bragt for at give læsere med særlig teoretisk interesse mulighed for at følge estimationen trin for trin. Læsere, som mest er interesseret i modellens brug samt de mere tekniske og biologiske forudsætninger og derfor ikke ønsker at afsætte tid til et dyberegående studium af det teoretiske grundlag, kan overspringe dette afsnit og gå direkte til afsnit 5.2.

Ved skift mellem to tilstande kan hver enkelt af de 4 tilstandsvariable skifte værdi. For at beregne de endelige overgangssandsynligheder kræves derfor kendskab til sandsynlighedsfordelingerne for overgange mellem forskellige værdier af hver enkelt tilstandsvariable. Hvad angår laktationsnummeret og tidspunktet i laktationen volder dette dog ikke problemer, idet værdien af disse i næste skridt ligger fast, såfremt koen beholdes. Tilbage er da kælvningsintervallets længde og ydelsesniveauet, som behandles i de følgende afsnit.

5.1.1 Sandsynlighedsfordelinger for kælvningsintervallets længde

Som nævnt i afsnit 4.1.1 antages, at kælvningsintervallets længde ikke afhænger af længden af foregående kælvningsinterval. I stedet regnes med en fast sandsynlighedsfordeling, der kun afhænger af laktationsnummeret.

Ved estimation af denne fordeling må der tages hensyn til de køer, der afgår uden at fuldføre den pågældende laktation, idet en del af disse vil være udsat på grund af manglende eller for sen drægtighed. Hvis der ses bort fra sådanne køer, vil den estimerede fordeling undervurdere kælvningsintervallernes forventede længde og dermed give et forkert billede af køernes fremtidige præstationer. Køer, der udsættes før kælvning, vil naturligvis have ukendt kælvningsinterval, men ud fra oplysning om tidspunkt for sidste inseminering er det muligt at fastslå, at kælvningsintervallet mindst vil være så langt som tidsrummet fra kælvning til sidste inseminering plus 280 dage.

Udsatte køer, der slet ikke er insemineret, udelades af beregningerne, idet grunden til, at sådanne køer ikke er insemineret, oftest vil være, at de enten er udsat meget tidligt i laktationen, eller at det hele tiden har været meningen, at de skulle udsættes. I sådanne tilfælde vil køerne næppe være udsat på grund af problemer med drægtigheden, hvorfor der ikke er nogen grund til at antage, at længden af deres kælvningsintervaller ville fordele sig anderledes end for de andre køer.

Opdeles kælvningsintervallerne efter længde i måneder, fandtes fra det empiriske materiale de i tabel 5.1 viste fordelinger af antal observationer i de forskellige kategorier, både hvad angår faktisk konstaterede intervaller, og intervaller som kun vides at ville være blevet mindst så lange som angivet.

Først beregnes udelukkende på grundlag af de faktisk konstaterede intervaller for hver laktation en frekvensfordeling ud fra formlen:

$$P_f(k) = \frac{n_f(k)}{N_f} \quad (5.1)$$

- hvor $n_f(k)$ er antal faktisk konstaterede kælvningsintervaller mellem k og $k+1$ måneder (k er et helt tal), og N_f er det totale antal faktisk konstaterede intervaller vedrørende det pågældende laktationsnummer.

Lad tilsvarende $n_m(k)$ betegne antallet af observationer, hvor kælvningsintervallet mindst ville være blevet mellem k og $k+1$ måneder.

Tabel 5.1 Fordeling af antal afsluttede kælvningsintervaller, samt antallet af ukendte intervaller, der ville have opnået mindst den angivne længde.

Table 5.1 Distribution of terminated calving intervals and number of unknown calving intervals at least as long as indicated.

Kælvnings- interval (måneder)	Laktationsnummer (Lactation number)							
	1		2		3		4	
	Af- slut- tede så lang	Mindst så lang		Af- slut- tede så lang	Mindst så lang		Af- slut- tede så lang	Mindst så lang
Calving interval (months)	Terminated	At least as long	Terminated	At least as long	Terminated	At least as long	Terminated	At least as long
10-11	388	129	238	135	102	71	58	25
11-12	746	406	470	343	196	164	113	89
12-13	467	268	221	241	144	113	52	59
13-14	238	170	119	115	49	85	31	45
14-15	123	138	38	82	21	58	7	19
15-16	52	68	17	54	5	40	2	14
16-17	28	44	10	21	2	14	4	10
over 17	28	48	12	20	2	8	5	8
Samlet antal	3341		2136		1074		541	

Ud fra tabellen kan sandsynlighedsfordelingen estimeres på følgende måde:

For $k = 10$ antages det, at de $n_m(10)$ observationer er fordelt på samme måde som de faktisk konstaterede kælvningsintervaller. Betegner den estimerede sandsynlighedsfunktion $P(k)$, fås således:

$$P(10) = \frac{n_f(10) + n_m(10) \cdot P_f(10)}{N} \quad (5.2)$$

- hvor N er det totale antal observationer vedrørende laktationsnummeret. $P(11)$ beregnes ud fra den yderligere forudsætning, at de $n_m(11)$ observationer med kælvningsintervaller mindst mellem 11 og 12 måneder fordeler sig på samme måde som den betingede sandsynlighedsfordeling $P(k|KI \geq 11)$. Med andre ord tænkes sandsynligheds-

fordelingen for de $n_m(11)$ observationer at være givet ved funktionen:

$$P_{m11}(k) = \frac{P(k)}{1-P(10)} \quad (5.3)$$

Eller generelt tænkes de $n_m(k')$ observationer at være fordelt i overensstemmelse med:

$$P_{mk'}(k) = \frac{P(k)}{1 - \sum_{i=10}^{k'-1} P(i)} \quad (5.4)$$

$P(11)$ vil da være givet ved:

$$P(11) = \frac{n_f(11) + n_m(10) \cdot P_f(11) + \frac{P(11)}{1-P(10)} \cdot n_m(11)}{N} \quad (5.5)$$

Den eneste ukendte i (5.5) er $P(11)$, og løses ligningen med hensyn til denne fås:

$$P(11) = \frac{n_f(11) + n_m(10) \cdot P_f(11)}{\left(N - \frac{n_m(11)}{1-P(10)}\right)} \quad (5.6)$$

(5.6) kan generelt udledes som:

$$P(k) = \frac{n_f(k) + n_m(10) \cdot P_f(k)}{\left(N - \sum_{j=0}^{k-11} \frac{n_m(k-j)}{1 - \sum_{i=10}^{k-j-1} P(i)}\right)} \quad (k \geq 11) \quad (5.7)$$

Ud fra (5.7) kan sandsynlighedsfordelingen da beregnes trin for trin for $k = 11, \dots, 17$, idet alle udtryk i ligningen er kendte, når alle tidligere trin (for mindre k 'er) er gennemregnet. Sandsynlighedsfordelinger for hver enkelt laktation estimeret efter (5.2) og (5.7) fremgår af tabel 5.2, hvor resultaterne også er summerede i overensstemmelse med definitionen af tilstandsvariablen for kælvningsintervallets længde i kapitel 4.

Tabel 5.2 Estimerede sandsynlighedsfordelinger for kælvningsintervallets længde i de forskellige laktationer.

Table 5.2 Estimated probability distributions of the length of the calving interval.

Antal måneder Number of months	Laktationsnummer (Lactation number)							
	1		2		3		4	
	Månedsvi- s Monthly	For- enklet Simpli- fied	Månedsvi- s Monthly	For- enklet Simpli- fied	Månedsvi- s Monthly	For- enklet Simpli- fied	Månedsvi- s Monthly	For- enklet Simpli- fied
10-11	,123	,398	,125	,427	,108	,358	,117	,397
11-12	,275	,302	,250	,358	,280	,397		
12-13	,204	,330	,187	,317	,229	,339	,166	,307
13-14	,126	,130	,110	,339	,141			
14-15	,087	,136	,060	,104	,075	,115	,044	,062
15-16	,049	,044	,040		,018			
16-17	,037	,037	,038	,038	,034	,034	,057	,057
over 17	,097	,097	,114	,114	,154	,154	,176	,176

5.1.2 Ydelsesmodellens parametre

Teknikken for estimation af parametrene i modellen (4.1) er beskrevet i appendiks A. I dette kapitel vil hovedsageligt kun resultaterne blive præsenteret med henvisninger til relevante formler i appendikset.

Ved regression af y_{an}^{44} (308-dages ydelsen) på G_a (besætningsgennemsnittet), KI_{an} (kælvningsintervallets længde og u_1, \dots, u_{n-1} (jævnfør (A.108)) fandtes de i tabel 5.3 viste regressionskoefficienter.

Koefficienterne vedrørende 1. laktation er dog estimeret på en indirekte måde som kort omtalt sidst i afsnit A.2.3 (appendikset), hvorved også resultater fra dellaktationer er inddraget.

Ved 1. og 2. laktation var alle virkninger meget stærkt signifikante ($P < 0,001$), hvormod virkningen af besætningsgennemsnit ikke var signifikant i 3. laktation. Endelig var kun virkningen af kælvningsintervallets længde signifikant i 4. laktation. Disse forhold skyldes dog uden tvivl de langt færre observationer ved de to sidste laktationer. I denne forbindelse er det et problem, at perioden, hvor informationerne er indsamlet, kun har strakt sig over godt 3 år.

Resultaterne i tabel 5.3 er udelukkende baseret på fuldførte laktationer (se dog tidligere med hensyn til 1. laktation), hvilket betyder, at køer, som ved periodens begyndelse eller slutning har været lakterende, ikke kunne inddrages i beregningerne. Når det yderligere tages i betragtning, at mange køer i løbet af perioden er blevet utsat, og at beregningerne kun omfatter køer fra 1. til 4. laktation, er der gjort et meget kraftigt indhug i de 10.500 laktationer (eller dellaktationer), som materialet omfatter.

Tabel 5.3 Estimerede regressionskoefficienter for de enkelte laktationer i overensstemmelse med formel (A.108)

Table 5.3 Estimated regression coefficients of various lactations according to the formula (A.108).

Regressionskoefficienter på
forklarende variable

Regression coefficients of explanatory variables

Lakt. nr.	Antal obs.	Kon- stant led	Besæt- nings- gennem- snit	Kælv- nings- inter- val	u_1	u_2	u_3	Betinget varians
Lact. No.	No. of obs.	Con- stant term	Herd average	Calving inter- val				Condi- tional variance
1	2048	-3245	,8728	7,913				665977
2	648	-3512	,9302	9,636	,4171			561154
3	119	- 312	,3376	11,034	,4168	,3351		539753
4	(59)	-1407	,5454	11,430	-,0625	,2358	,2626	628814

Antallet af brugbare observationer reduceres yderligere ved, at til estimation af parametre vedrørende en laktation kræves, at laktationsydelse og kælvningsinterval er kendt for alle koens foregående laktationer (idet u_1, \dots, u_{n-1} indgår i regressionen). Der har således i materialet kun været 648 køer, der har påbegyndt og fuldført 2 laktationer og kun 119, der har påbegyndt og fuldført 3 laktationer i observationsperioden. Endelig var der slet ingen køer, der var fuldt repræsenteret med 4 laktationer, hvilket søgtes løst ved at generere tilfældige tal for u_1 ud fra den betingede normalfordeling ($u_1|u_2, u_3$).

Alt i alt betyder disse forhold, at estimaterne for 3. og 4. laktation hviler på et temmeligt usikkert grundlag. Egentligt skulle der også være estimeret tilsvarende parametre for 5. laktation, men den

korte observationsperiode gjorde dette statistisk set uforsvarligt. Det vil derfor være rimeligt om nogle år, når der foreligger oplysninger om et tilfredsstillende antal køer med 5 fuldførte laktationer, at reestimere parametrene i tabel 5.3 for laktationsnumrene 3 til 5.

Ud fra tabel 5.3 beregnes som angivet i afsnit A.2.3 (appendikset) kovariansmatricen for vektorvariablen $u = (u_1, \dots, u_5)'$. Resultatet fremgår af tabel 5.4.

Tabel 5.4 Estimerede kovarianser mellem u 'er for forskellige laktationer.

Table 5.4 Estimated covariances between u 's of various lactations.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5^*
u_1	665977	277769	370658	121209	105000
u_2		677007	342631	232253	120000
u_3			809056	270084	255000
u_4				746928	260000
u_5					745000

* Alle kovarianser vedrørende 5. laktation er skønnet på grundlag af de øvrige estimater.

Et bedre indtryk af sammenhængen mellem de korrigerede ydelser i forskellige laktationer fås ved at betragte tabel 5.5, som angiver de tilsvarende korrelationer.

Tabel 5.5 Estimerede korrelationer mellem u 'er for forskellige laktationer.

Table 5.5 Estimated correlations between u 's of various lactations.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5^*
u_1	1	0,4137	0,5050	0,1719	0,15
u_2		1	0,4630	0,3266	0,17
u_3			1	0,3474	0,33
u_4				1	0,35
u_5					1

*Se fodnote til tabel 5.4.

Ud fra tabel 5.4 kan konstanterne i linearkombinationen, der definerer den egentlige tilstandsvariabel v_i i (4.2), bestemmes som vist i afsnit A.2.1 i appendikset. Resultatet er vist i tabel 5.6.

Tabel 5.6 Konstanterne i linearkombinationerne, der definerer tilstandsvariablen for ydelse.

Table 5.6 The constants of the linear combinations defining the state variable concerning milk yield.

$$v_1 = 0,4171 u_1$$

$$v_2 = 0,4168 u_1 + 0,3351 u_2$$

$$v_3 = 0,0892 u_1 + 0,0717 u_2 + 0,2626 u_3$$

$$v_4 = 0,0940 u_1 - 0,0023 u_2 + 0,1551 u_3 + 0,2724 u_4$$

Ud fra tabel 5.4 og 5.6 kan kovariansmatricen for den egentlige tilstandsvariabel v_n , defineret i (4.2) beregnes ved hjælp af (A.50). Resultatet fremgår af tabel 5.7. De tilsvarende korrelationer er vist i tabel 5.8.

Tabel 5.7 Estimerede kovarianser mellem v 'er for forskellige laktationer.

Table 5.7 Estimated covariances between v 's of various lactations.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	115862	154602	73683	63595
v_2		269309	128350	110785
v_3			98391	84922
v_4				119955

Tabel 5.8 Estimerede korrelationer mellem v 'er for forskellige laktationer.

Table 5.8 Estimated correlations between v 's of various lactations.

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	0,8752	0,6901	0,5394
v_2		1	0,7885	0,6164
v_3			1	0,7817
v_4				1

Endelig er i tabel 5.9 angivet kovariansen mellem u_n og v_m vedrørende henholdsvis n'te og m'te laktation - se (A.99).

Tabel 5.9 Estimerede kovarianser mellem u og v for forskellige laktationer.

Table 5.9 Estimated covariances between u and v of various lactations.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
v_1	277779	115857	154601	50556	43796
v_2	370660	342639	269306	128348	83976
v_3	176656	163293	270087	98388	84933
v_4	152469	140961	233109	256213	119969

Disse kovarianser skal anvendes, når den faktiske ydelse i indeværende eller næste laktation skal forudsiges for en given værdi af v . De i denne forbindelse relevante korrelationer er angivet i tabel 5.10.

Tabel 5.10 Estimerede korrelationer mellem v og u for henholdsvis indeværende og næste laktation.

Table 5.10 Estimated correlations between v and u of present and next lactation, respectively.

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
v_1	1	0,4145			
v_2		0,8032	0,5772		
v_3			0,9568	0,3627	
v_4				0,8581	0,4018

Tabel 5.10 viser, at der er en meget høj korrelation mellem v og u for samme laktation og en rimelig korrelation mellem v og u for efterfølgende laktation.

På de tidspunkter i laktationen (12, 24 eller 36 uger efter kælvning), hvor v_n endnu ikke er kendt, bruges den forventede værdi af v_n givet y_{n12} , y_{n24} eller y_{n36}^t (ydelsen de første 12, 24 eller 36 uger). Den forventede værdi betegnes v_n^t ($t = 12, 24$ eller 36) og er defineret i (A.90) - se også (A.81). Alle teoretiske aspekter vedrørende dette er detaljeret beskrevet i afsnit A.2.2 i appendikset.

I det følgende anføres resultaterne fra estimation af de nødvendige parametre i forbindelse med v_n^t .

I hver laktation estimeres kovariansen mellem hvert par af variable blandt y_n^{12} , y_n^{24} , y_n^{36} , y_n^{44} , u_1 , ..., u_{n-1} . Resultaterne fremgår af tabellerne 5.11 til 5.14.

Tabel 5.11 Estimerede kovarianser mellem dellaktationsydelser og 308 dages ydelse i 1. laktation.

Table 5.11 Estimated covariances between accumulated FCM at various points of 1st lactation.

	y_1^{12*}	y_1^{24}	y_1^{36}	y_1^{44}
y_1^{12}	91413	135544	161804	178874
y_1^{24}		258506	317495	359629
y_1^{36}			469850	541789
y_1^{44}				751727

* I denne og følgende tabeller betegner det øvre indeks antallet af uger efter kælvning.

In this and the following tables the upper index refers to number of weeks after calving.

Tabel 5.12 Estimerede kovarianser mellem dellaktationsydelser og 308 dages ydelse i 2. laktation samt u_1 .

Table 5.12 Estimated covariances between accumulated 4% FCM at various points of 2nd lactation and u_1 .

	y_2^{12}	y_2^{24}	y_2^{36}	y_2^{44}	u_1
y_2^{12}	150525	216022	239789	245500	72373
y_2^{24}		400129	458023	484673	152195
y_2^{36}			658299	724446	214853
y_2^{44}				948638	270374

Tabel 5.13 Estimerede kovarianser mellem dellaktationsydelser og 308 dages ydelse i 3. laktation samt u_1 og u_2 .

Table 5.13 Estimated covariances between accumulated 4% FCM at various point of 3rd lactation and u_1 and u_2 .

	y_3^{12}	y_3^{24}	y_3^{36}	y_3^{44}	u_1	u_2
y_3^{12}	159085	231232	254188	257205	79454	61394
y_3^{24}		431755	483895	503944	153188	157379
y_3^{36}			703296	767920	225251	228047
y_3^{44}				1010468	207880	308215

Tabel 5.14 Estimerede kovarianser mellem dellaktationsydelser og 308 dages ydelse i 4. laktation samt u_1 , u_2 og u_3 .

Table 5.14 Estimated covariances between accumulated 4% FCM at various points of 4th lactation and u_1 , u_2 and u_3 .

	y_4^{12}	y_4^{24}	y_4^{36}	y_4^{44}	u_1	u_2	u_3
y_4^{12}	152273	245499	312443	337745	64331	93244	69983
y_4^{24}		440391	590161	658144	118628	181367	160320
y_4^{36}			846539	974229	152274	277462	253424
y_4^{44}				1226441	183720	293291	294780

Med k_n defineret som i (A.78) vil variationen i denne variabel udtrykke den del af variationen i y_n^{44} , der forklares af de forklarende variable G og KI_n i (4.1) (Indekset a for den konkrete ko anføres ikke mere, da alle formler vedrører sammenhænge hos den samme ko). Til beregning af variansen af k_n anvendes (A.80), hvortil imidlertid kræves kendskab til variationen i de forklarende variable samt deres indbyrdes kovarians. Som det fremgår af afsnit 5.1.1, antages imidlertid, at der findes en fast sandsynlighedsfordeling for kælvningsintervallets længde uafhængigt af alle andre forhold - herunder besætningsgennemsnittet G. Konsekvensen heraf er, at kovariansen mellem G og KI_n er nul.

Hvad angår variansen i KI_n og G fandtes de i tabel 5.15 viste estimerater, hvor $Var(KI_n)$ er fundet ved hjælp af tabel 5.2, idet alle intervaller længere end 430 dage svarende til ca. 14 måneder sattes lig 430 dage (jævnfør afsnit 4.2), og $Var(G)$ er estimeret direkte fra grunddata. $Var(k_n)$ beregnet efter (A.80) fremgår ligeledes af tabellen.

Tabel 5.15 Estimerede varianser af de forklarende variable i modelen (4.1) samt heraf beregnet varians af k_n .

Table 5.15 Estimated variances of the explanatory variables of the model (4.1) and calculated variance of k_n .

Lakt. nr. (n) Lact. No. (n)	Kælvningsint. Calving interval	Besætn.genn. Herd average	k_n
1	1491		181158
2	1495		238541
3	1460	115254	190890
4	1539		235346

* Ved beregningen er kælvningsintervaller over 430 dage ændret til 430 dage.

Den forventede værdi U_n^t af u_n givet y_n^t fremgår af (A.81). Til beregning af $Var(U_n^t)$ kræves i følge (A.83) (foruden allerede estimerede parametre) kendskab til kovariansen mellem k_n og y_n^t . Som vist i (A.84) kan denne kovarians beregnes ud fra estimerater af kovarianser mellem hver enkelt af de forklarende variable og y_n^t . Som omtalt i afsnit 4.2 indvirker KI_n imidlertid ikke på hverken 12 ugers eller 24 ugers ydelsen, hvoraf ses, at $Cov(KI_n, y_n^{12}) = Cov(KI_n, y_n^{24}) = 0$. Derimod må $Cov(KI_n, y_n^{36})$ og $Cov(G, y_n^t)$ estimeres. Resultatet fremgår af tabel 5.16, som også viser de deraf beregnede $Cov(k_n, y_n^t)$.

Table 5.16 Estimerede kovarianser mellem de forklarende variable i (4.1) og dellaktationsydelsen samt heraf beregnet kovarians mellem k_n og dellaktationsydelserne.

Table 5.16 Estimated covariances between the explanatory variables of (4.1) and accumulated 4% FCM at various points of lactation. Further the calculated covariances between k_n and accumulated 4% FCM at various points of lactation.

Lakt.nr. (n) Lact. no. (n)	Variabel Variable	y_n^{12}	y_n^{24}	y_n^{36}
1	KI ₁	-	-	6596
	G	19342	35436	48869
	k_1	-16882	-30928	-94847
2	KI ₂	-	-	5544
	G	26280	54260	75271
	k_2	-24446	-50473	-123439
3	KI ₃	-	-	3595
	G	45852	68855	97627
	k_3	-15480	-23245	-72626
4	KI ₄	-	-	1129
	G	31858	55885	92839
	k_4	-17375	-30480	-63538

Ud fra tabellerne 5.11 - 5.14, 5.15 og 5.16 kan tabellerne 5.17 til 5.20 beregnes ved hjælp af formlerne (A.83), (A.86) og (A.89).

Tabel 5.17 Estimator for varianser af U_1^{12} , U_1^{24} og U_1^{36} samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.17 Estimates of the variances and the mutual covariances of U_1^{12} , U_1^{24} and U_1^{36} .

	U_1^{12}	U_1^{24}	U_1^{36}
U_1^{12}	465105	474078	403843
U_1^{24}		595415	538083
U_1^{36}			587163

Tabel 5.18 Estimator for varianser af U_2^{12} , U_2^{24} , U_2^{36} og u_1 samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.18 Estimates of the variances and the mutual covariances of U_2^{12} , U_2^{24} , U_2^{36} and u_1 .

	U_2^{12}	U_2^{24}	U_2^{36}	u_1
U_2^{12}	559200	564299	493211	118037
U_2^{24}		703346	652108	184353
U_2^{36}			764095	236442
u_1				665977

Tabel 5.19 Estimator for varianser af U_3^{12} , U_3^{24} , U_3^{36} , u_2 og u_1 samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.19 Estimates of the variances and the mutual covariances of U_3^{12} , U_3^{24} , U_3^{36} , u_2 and u_1 .

	U_3^{12}	U_3^{24}	U_3^{36}	u_2	u_1
U_3^{12}	556678	575089	535291	99260	128459
U_3^{24}		724830	701159	183693	178801
U_3^{36}			870773	249002	245949
u_2				677007	277769
u_1					665977

Tabel 5.20 Estimater for variansen af U_4^{12} , U_4^{24} , U_4^{36} , u_3 , u_2 og u_1 samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.20 Estimates of the variances and the mutual covariances of U_4^{12} , U_4^{24} , U_4^{36} , u_3 , u_2 and u_1 .

	U_4^{12}	U_4^{24}	U_4^{36}	u_3	u_2	u_1
U_4^{12}	907396	965021	948794	155224	206817	142688
U_4^{24}		1127810	1131675	239591	271045	177284
U_4^{36}			1210281	291650	319314	175243
u_3				809056	342631	370658
u_2					677007	277769
u_1						665977

Ud fra disse tabeller kan parametrene for tilstandsvariablene v_n^t nu beregnes ved hjælp af (A.97) - se dog også formlerne (A.91) til (A.95). Resultaterne fremgår af tabellerne 5.21 til 5.24.

Tabel 5.21 Estimater for variansen af v_1^{12} , v_1^{24} og v_1^{36} samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.21 Estimates of the variances and the mutual covariances of v_1^{12} , v_1^{24} and v_1^{36} .

	v_1^{12}	v_1^{24}	v_1^{36}
v_1^{12}	80915	82477	70258
v_1^{24}		103586	93612
v_1^{36}			102150

Tabel 5.22 Estimater for variansen af v_2^{12} , v_2^{24} , v_2^{36} og v_1 samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.22 Estimates of the variances and the mutual covariances of v_2^{12} , v_2^{24} , v_2^{36} and v_1 .

	v_2^{12}	v_2^{24}	v_2^{36}	v_1
v_2^{12}	211461	221296	220589	132276
v_2^{24}		246172	247694	141545
v_2^{36}			267544	148826
v_1				115862

Tabel 5.23 Estimater for variansen af v_3^{12} , v_3^{24} , v_3^{36} , v_2 og v_1 samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.23 Estimates of the variances and the mutual covariances of v_3^{12} , v_3^{24} , v_3^{36} , v_2 and v_1 .

	v_3^{12}	v_3^{24}	v_3^{36}	v_2	v_1
v_3^{12}	60476	64515	64573	80425	47155
v_3^{24}		77610	78780	93365	52669
v_3^{36}			93279	106461	60024
v_2				269309	154602
v_1					115862

Tabel 5.24 Estimater for variansen af v_4^{12} , v_4^{24} , v_4^{36} , v_3 , v_2 og v_1 samt indbyrdes kovarianser.

Table 5.24 Estimates of the variances and the mutual covariances of v_4^{12} , v_4^{24} ,
 v_4^{36} , v_3 , v_2 and v_1 .

	v_4^{12}	v_4^{24}	v_4^{36}	v_3	v_2	v_1
v_4^{12}	123289	131975	132888	76731	110902	66035
v_4^{24}		148464	150868	84861	120693	69966
v_4^{36}			158817	89478	124867	69734
v_3				98391	128350	73683
v_2					269309	154602
v_1						115862

Med tabellerne 5.21 til 5.24 er al nødvendig information til beregning af overgangssandsynligheder med hensyn til produktion tilvejebragt.

5.1.3 Overgangssandsynligheder med hensyn til mælkeproduktion

I dette afsnit søges fastlagt overgangssandsynligheder mellem forskellige ydelsesniveauer, sådan at hvis niveauet i indeværende skridt er N_i , vil det være muligt at sige, hvad sandsynligheden q_{ij} er for, at niveauet er N_j i næste skridt.

Først må de forskellige ydelsesniveauer dog defineres nærmere. Som nævnt i afsnit 4.1 skal der være 5 niveauer i 1. og 4. laktation og 6 niveauer i de øvrige laktationer. Disse niveauer defineres ud fra spredningen på v_n sådan, at alle 6 niveauer i 2. og 3. laktation bliver lige sandsynlige:

$$\text{for } n = 2 \text{ eller } 3: P(v_n \in N_i) = \frac{1}{6} \quad (\text{alle } i) \quad (5.8)$$

I 1. og 4. laktation er der kun 5 niveauer, men da det især er lavtydende køer, der skal udskiftes, ønskes den fineste inddeling for niveauer under middel. Derfor fastlægges niveauerne her i overensstemmelse med:

$$P(v_n \in N_i) = \frac{1}{6} \quad (i = 1, 2, 3)$$

for $n = 1$ eller 4:

(5.9)

$$P(v_n \in N_i) = \frac{1}{4} \quad (i = 4, 5)$$

- hvor små værdier af i svarer til lave ydelser.

Ydelsesniveauer fastlagt i overensstemmelse med (5.8) og (5.9) fremgår af tabel 5.25.

Tabel 5.25 Fastlæggelse af ydelsesniveauer i de forskellige taktationer

Table 5.25 Definition of classes of milk yield in various lactations.

Lakt. nr.(n)	Ni- veau	v_n	Værdi*	Græn- ser	Frek- vens	Lakt. nr.(n)	Ni- veau	v_n	Værdi*	Græn- ser	Frek- vens
Lact. no.(n)	Class	Value*		Limits	Fre- quency	Lact. no.(n)	Class	Value*	Limits	Fre- quency	
1	1	-509		$-\infty$	1/6	2	1	-777		$-\infty$	1/6
				-330			2	-356		-503	
	2	-234		-146	1/6		3	-109		-223	1/6
				0			4	109		0	1/6
	3	-72		109	1/6		5	356		223	1/6
				228			6	777		503	1/6
	4	109			1/4						
	5	434		∞	1/4						
3	1	-469		$-\infty$	1/6	4	1	-519		$-\infty$	1/6
				-304			2	-237		-335	
	2	-215		-135	1/6		3	-73		-149	1/6
				0			4	111		0	1/6
	3	-69		135	1/6		5	442		232	1/4
	4	69			1/6						
	5	215		304	1/6						
				∞							
	6	469			1/6						

* Middelværdi af intervallet defineret af de viste grænser.

Mean value of the interval defined by the correspond. limits.

De i tabel 5.25 fastlagte grænser anvendes både for v_n^{12} , v_n^{24} og v_n^{36} , men da disse variable ikke har eksakt samme spredning som v_n gælder de viste frekvenser kun tilnærmelsesvis for disse. Overgangssandsynligheder fra v_n^{36} (der skelnes ikke mellem v_n^{36} og v_n på grund på grund af den meget høje korrelation mellem y_n^{36} og y_n^{44}) til v_{n+1}^t beregnes efter formel (A.98), og overgangssandsynligheder fra v_n^t til v_n^s ($s = t + 12$) beregnes på tilsvarende måde.

Alle parametre, der indgår i tæthedsfunktionen for den todimensi-
nale normalfordeling i (A.98), fremgår af tabellerne 5.21 til 5.24 sammenholdt med at middelværdien af alle variable er nul - se (A.96).

Overgangssandsynligheder q_{ij} for alle mulige overgange fremgår af tabellerne B.1 til B.11 i appendiks B. Rent praktisk er beregnin-
gerne foretaget i datamatsproget LIMP, som er et specielt matematisk sprog, hvor det bl.a. er muligt at integrere funktioner af flere variable. For en beskrivelse af sproget henvises til Jensen (1972).

5.1.4 Overgangssandsynligheder mellem tilstande

Med udgangspunkt i resultaterne fra afsnittene 5.1.1 og 5.1.3 er det nu muligt at beregne overgangssandsynligheder mellem vilkårlige tilstande under vilkårlige beslutninger.

Situationen er mest enkel, hvis den trufne beslutning er 2, 3 eller 4 (se nummereringen af beslutningerne i afsnit 4.1), hvor koen i alle tre tilfælde altid udskiftes på et tidspunkt i skridtet. I sådanne situationer fås derfor:

$$k = 2, 3 \text{ eller } 4 : p_{ij}^k = 0 \quad \text{for } i \leq 176 \text{ og } j \leq 176 \quad (5.10)$$

$$k = 2, 3 \text{ eller } 4 : p_{i177}^k = 1 \quad \text{for } i \leq 176 \quad (5.11)$$

- idet processen altid straks går til tilstand 177, såfremt en ko udskiftes. Der skal ikke træffes beslutninger i tilstand 177 (ud-
skiftningstilstanden), men de faste overgangssandsynligheder p_{177j} beregnes på følgende måde:

Lad n_j , t_j , v_j og KI_j være værdien af tilstandsvariablene (hhv.
laktationsnummer, tidspunkt i laktionen, ydelsesvariablen og kælv-
ningsintervallets længde) i tilstand j . Da fås:

$$(n_j, t_j) = (1, 12) : p_{177j} = P(v_j^- \leq v_1^{12} \leq v_j^+) \quad (5.12)$$

- hvor v_j^- og v_j^+ er hhv. nedre og øvre grænse for v_j (jvf. tabel 5.25). Sandsynligheden på højresiden i (5.12) beregnes ud fra den estimerede spredning af v_j^{12} (se tabel 5.21). Endvidere fås:

$$(n_j, t_j) * (1,12): p_{177,j} = 0 \text{ for } j \leq 176 \quad (5.13)$$

og:

$$p_{177,177} = 1 - O(1,1) \quad (5.14)$$

- hvor $O(1,1)$ er den i afsnit 4.3 omtalte overlevelsessandsynlighed i 1. laktation uge 1-12 (se tabel 4.1).

Tilbage er da overgangssandsynlighederne fra de øvrige 176 tilstande, når beslutning 1 ("behold") træffes. Med betegnelser analogt med ovenstående, fås de i oversigten på næste side viste formler til bestemmelse af p_{ij} . q_{ij} fremgår af tabellerne B.1 til B.11; $P(K_i = a)$ med videre kan findes af tabel 5.2, og endelig betegner $O(n_i, t_i)$ overlevelsessandsynligheden, hvilket vil sige sandsynligheden for, at koen ikke ufrivilligt må udsættes i et skridt, hvor laktationsnummeret er n_i og laktationsstadiet er t_i (se tabel 4.1).

Disse overgangssandsynligheder er ikke specielt beregnet og kan derfor ikke vises i tabelform. Da der i alt er $177^2 =$ ca. 31000, ville dette dog også være uoverkommeligt. I stedet er delparametrene, hvilket vil sige overlevelsessandsynligheder, sandsynlighedsfordelinger for kælvningsintervallets længde og overgangssandsynligheder med hensyn til mælkeproduktion, separat indlæst i EDB-programmet til optimering. Først ved selve optimeringen i datamaten bliver de endelige overgangssandsynligheder automatisk beregnet ud fra de formler, der er udledt i dette afsnit.

Formålet med dette er at få en fleksibel model, hvor de enkelte forudsætninger kan ændres uafhængigt af hinanden. Dette kommer især på tale med hensyn til overlevelsessandsynlighederne, hvor der, som det fremgår af tabel 4.1, er defineret 3 sæt, hvoraf der individuelt udvælges ét under hensyn til sundhedstilstanden i den konkrete besætning. Også hvis disse overlevelsessandsynligheder senere estimeres på grundlag af et empirisk datamateriale, vil det nye sæt uden yderligere ændringer kunne indføres i programmet. Det samme ville være tilfældet, hvis overgangssandsynlighederne med hensyn til produktion på et senere tidspunkt estimeres på et større grundlag, hvad angår 3. og 4. laktation (jævnfør afsnit 5.1.2).

$$\begin{aligned}
 & \text{(5.15) } \text{Oversigt over formler til beregning af overgangssandsynligheder fra} \\
 & \text{tilstand } 1-176 \text{ til en vilk\u00e5rlig anden tilstand, n\u00e5r koen beholdes.} \\
 & \text{Formulas for calculating transition probabilities from state } i \text{ (} i = 1, \dots, 176 \text{)} \\
 & \text{to state } j \text{ (} j = 1, \dots, 177 \text{), when the cow is kept.}
 \end{aligned}$$

$t_i = 12:$	$n_i \neq n_j : \begin{cases} j = 177: & p_{ij}^1 \\ j \neq 177: & p_{ij}^1 \end{cases} = 0$	$n_i = n_j : \begin{cases} t_j = 24: & p_{ij}^1 = q_{ij} \cdot P(KI = KI_j) \cdot 0(n_i, t_i) \\ t_j \neq 24: & p_{ij}^1 = 0 \end{cases}$
$t_i = 24:$	$n_i \neq n_j : \begin{cases} j = 177: & \begin{cases} KI_i = 11 \text{ eller } 13: & p_{ij}^1 = 1 - 0(n_i, t_i) \\ KI_i \text{ ukendt:} & p_{ij}^1 = 1 - 0(n_i, t_i) + \frac{P(KI \geq 16, 5)}{P(KI \geq 15)} \cdot 0(n_i, t_i) \end{cases} \\ j \neq 177: & p_{ij}^1 = 0 \end{cases}$	$n_i = n_j : \begin{cases} KI_i = 11 \text{ eller } 13: & \begin{cases} KI_j = KI_i: & p_{ij}^1 = q_{ij} \cdot 0(n_i, t_i) \\ KI_j \neq KI_i: & p_{ij}^1 = 0 \end{cases} \\ t_j = 36: & p_{ij}^1 = 0 \end{cases}$
$t_i = 36:$	$n_i < 4: \begin{cases} j = 177: & p_{ij}^1 = 1 \\ j \neq 177: & p_{ij}^1 = 0 \end{cases}$	$n_i = n_j^{-1}: \begin{cases} j = 177: & p_{ij}^1 = 1 - 0(n_i, t_i) \\ j \neq 177: & p_{ij}^1 = 0 \end{cases}$
	$n_i = n_j^{-1}: \begin{cases} t_j = 12: & p_{ij}^1 = q_{ij} \cdot 0(n_i, t_i) \\ t_j \neq 12: & p_{ij}^1 = 0 \end{cases}$	

(5.15) Overview of formulas for calculating transition probabilities from state i ($i = 1, \dots, 176$) to state j ($j = 1, \dots, 177$), when the cow is kept.

5.2 Produktion og foderforbrug i de enkelte 4-ugers perioder

For at beregne det økonomiske udbytte af et skridt er det nødvendigt at kende de fysiske bevægelser i løbet af skridtet. I det økonomiske udbytte medregnes i modellen salg af mælk, spædekalve og udsætterkører samt køb af foder og kælvekvier. Øvrige faktorer - f.eks. værdi af gødning eller udgifter til strøelse - antages enten at være ens for alle køer eller at være af mindre betydning. Der er dog intet til hinder for at inddrage f.eks. dyrlægeudgifter, hvis det senere skønnes at være relevant.

De fysiske kvantiteter beregnes for hver enkelt 4-ugers periode i samtlige tilstænde. I de følgende afsnit beskrives beregningen af hver enkelt post for sig.

5.2.1 Mælkeproduktion

På taktationsstadiet t er den forventede værdi af v_n^t givet ved v_n^t . Ved indsættelse af denne forventede værdi af v_n^t i (A.100) kan den forventede værdi af u_n^{44} beregnes. Ved hjælp af (4.1) kan den forventede 308-dages ydelse y_n^{44} da beregnes for et givet besætningsgennemsnit G og kælvningsinterval KI.

Målet er da på grundlag af y_n^{44} at beregne ydelsen i de enkelte 4-ugers perioder ud fra formlen:

$$y_n^i = a_n^i + b_n^i \cdot y_n^{44} \quad (5.16)$$

- hvor i angiver 4-ugers perioden, og a_n^i og b_n^i er konstanter.

Imidlertid fremgår det af (4.1), at y_n^{44} afhænger af kælvningsintervallets længde. Dette gør direkte brug af (5.16) uheldig i første del af laktationen, fordi ydelsen her ikke afhænger af KI. Derfor valgtes, når y_n^{44} skal beregnes i modellen, at sætte KI fast til 365 dage, sådan at det beregnede y_n^{44} svarer til 308-dages ydelsen korrigeret til samme kælvningsinterval.

Ved estimation af a_n^i og b_n^i i (5.16) må 308-dages ydelserne i det empiriske datamateriale således også standardiseres til 365 dages kælvningsinterval, hvilket sker ved hjælp af tabel 5.3. Har en ko i 2. laktation således haft et kælvningsinterval på 415 dage, nedsættes den observerede 308-dages ydelse med $9,636 \times (415-365) = 482$ kg 4% mælk, når konstanterne i (5.16) estimeres.

I de sidste laktationsafsnit, hvor ydelsen afhænger af KI, estimeres konstanterne særskilt for kælvningsintervaller på 11, 13, 15 og 16,5 måneder.

Resultaterne fremgår af tabellerne 5.26 til 5.29. I de senere laktationsafsnit har der i visse grupper været meget få køer (på grund af opdelingen efter KI), hvorved tilfældige udsving har været relativt store. Sådanne umotiverede udsving er udjævnet i tabellerne.

Skridt, der begynder 36 uger efter kælvning, omfatter også mælkeproduktion for de første 12 uger af næste laktation. I denne situation beregnes den forventede værdi af u_{n+1} ud fra (A.100) og herefter y_{n+1}^{44} ved hjælp af (4.1). Ydelsen i de enkelte 4-ugers perioder kan da aflæses af tabellerne 5.26 til 5.29.

Tabel 5.26 Sammenhæng mellem y (308-dages ydelser i kg 4% mælk standardiseret til 365 dages kælvningsinterval) og ydelsen i kg 4% mælk i de enkelte 4-ugers perioder. 1. laktation.

Table 5.26 Relationship between y (308 days 4% FCM after correction for length of calving interval - adjusted to 365 days) and kg FCM per 4 weeks period of 1st lactation.

Periode nr. Period no.	Kælvningsinterval, måneder Calving interval, months			
	11	13	15	16,5
1	113 + 0,089y			
2	108 + 0,089y			
3	84 + 0,091y			
4	70 + 0,090y		(Som ved 11 måneder)	
5	56 + 0,088y			
6	42 + 0,088y			
7	13 + 0,091y	14 + 0,090y	52 + 0,087y	
8	-11 + 0,092y	-10 + 0,091y	28 + 0,088y	(Som ved
9	-35 + 0,091y	-36 + 0,093y	10 + 0,088y	15 måne-
10	-64 + 0,090y	-50 + 0,091y	-3 + 0,086y	der)
11	-45 + 0,040y	-70 + 0,085y	13 + 0,080y	
12		-90 + 0,075y	41 + 0,070y	40 + 0,073y
13			20 + 0,065y	20 + 0,071y
14			1 + 0,058y	0 + 0,069y
15				-20 + 0,064y
16				-40 + 0,054y

Tabel 5.27 Sammenhæng mellem y (308-dages ydelser i kg 4% mælk standardiseret til 365 dages kælvningsinterval) og ydelsen i kg 4% mælk i de enkelte 4-ugers perioder. 2. laktation.

Table 5.27 Relationship between y (308 days 4% FCM after correction for length of calving interval - adjusted to 365 days) and kg FCM per 4 weeks period of 2nd lactation.

Periode nr.	Kælvningsinterval, måneder Calving interval, months			
	11	13	15	16,5
1	219 + 0,093y			
2	150 + 0,100y			
3	95 + 0,100y			
4	81 + 0,094y		(Som ved 11 måneder)	
5	51 + 0,092y			
6	26 + 0,094y			
7	-45 + 0,096y	31 + 0,084y	73 + 0,080y	99 + 0,078
8	-81 + 0,094y	-29 + 0,087y	28 + 0,080y	56 + 0,078
9	-73 + 0,084	-81 + 0,087y	-14 + 0,080y	14 + 0,078
10	-196 + 0,070y	-115 + 0,085y	-56 + 0,080y	-28 + 0,078
11		-133 + 0,077y	-98 + 0,080y	-70 + 0,078
12		-133 + 0,063y	-70 + 0,070y	-77 + 0,073
13			-91 + 0,065y	-105 + 0,071
14			-126 + 0,058y	-133 + 0,069
15				-140 + 0,064
16				-154 + 0,054

Tabel 5.28 Sammenhæng mellem y (308-dages ydelser i kg 4% mælk standardiseret til 365 dages kælvningsinterval) og ydelsen i kg 4% mælk i de enkelte 4-ugers perioder. 3. laktation.

Table 5.28 Relationship between y (308 days 4% FCM after correction for length of calving interval - adjusted to 365 days) and kg FCM per 4 weeks period of 3rd lactation.

Periode nr.	Kælvningsinterval, måneder Calving interval, months			
	11	13	15	16,5
1	236 + 0,093y			
2	212 + 0,093y			
3	171 + 0,090y			
4	130 + 0,088y		(Som ved 11 måneder)	
5	73 + 0,090y			
6	22 + 0,091y			
7	-61 + 0,097y	-35 + 0,095y	-9 + 0,093y	
8	-91 + 0,092y	-80 + 0,095y	-51 + 0,093y	
9	-102 + 0,084y	-125 + 0,095y	-93 + 0,093y	
10	-285 + 0,075y	-140 + 0,090y	-135 + 0,093y	
11		-160 + 0,085y	-177 + 0,093y	måneder)
12		-280 + 0,070y	-189 + 0,088y	
13			-204 + 0,083y	-204 + 0,083y
14			-296 + 0,068y	-230 + 0,078y
15				-256 + 0,073y
16				-276 + 0,060y

Tabel 5.29 Sammenhæng mellem y (308-dages ydeler i kg 4% mælk standardiseret til 365 dages kælvningsinterval) og ydelsen i kg 4% mælk i de enkelte 4-ugers perioder. 4. og 5. laktation.

Table 5.29 Relationship between y (308 days 4% FCM after correction for length of calving interval - adjusted to 365 days) and kg FCM per 4 weeks period of 4th and 5th lactation.

Periode nr. Period no.	Kælvningsinterval, måneder Calving interval, months			
	11	13	15	16,5
1	196 + 0,102y			
2	105 + 0,113y			
3	94 + 0,105y			
4	84 + 0,097y		(Som ved 11 måneder)	
5	53 + 0,094y			
6	29 + 0,090y			
7	-42 + 0,092y	-21 + 0,091y	36 + 0,085y	
8	-56 + 0,085y	-96 + 0,095y	-3 + 0,085y	
9	-73 + 0,078y	-160 + 0,097y	-42 + 0,085y	
10	-153 + 0,063y	-188 + 0,092y	-82 + 0,085y	(Som ved 15
11		-155 + 0,079y	-112 + 0,083y	måneder)
12		-153 + 0,072y	-169 + 0,085y	
13			-159 + 0,076y	
14			-237 + 0,081y	
15				-274 + 0,076
16				-312 + 0,066

5.2.2 Foderforbrug

Ved beregning af foderforbruget skelnes mellem basisfoder (til vedligeholdelse, tilvækst og fosterproduktion) og produktionsfoder (til mælkeproduktion). Herved bliver det senere muligt at specificere priser på de to typer foder hver for sig, idet produktionsfoderet er væsentligt dyrere end basisfoderet. Tages ikke hensyn til dette, vil højtydende køer favoriseres uforholdsmæssigt meget.

Tabellerne 5.30 til 5.33 viser det forudsatte foderforbrug. Det anførte produktionsfoder svarer til en fodereffektivitet på 90%. Ved beregning af produktionsfoder i 2.-5. laktation er der taget hensyn til, at koen i begyndelsen af laktationen "malker af kroppen". I øvrigt forudsættes, at køerne fodres efter det forenklede fodringsprincip, hvilket vil sige konstant kraftfodertildeling og grovfoder ad libitum frem til 24 uger efter kælvning og herefter kraftfoder efter såvel ydelse som ønsket huld. På grundlag af disse tabeller kan foderforbruget i hver enkelt 4-ugers periode beregnes for henholdsvis basisfoder og produktionsfoder.

Tabel 5.30 Foderforbrug i 1. laktation, FE pr. ko dagligt.

Table 5.30 Daily food intake during 1st lactation, Scandinavian Feed Units (SFU) per cow.

Lakt.stadium uger Time of lact. weeks	Basisfoder (Basal food)				Produkt.foder Food for milk production
	Vedligehold. Maintenance	Til- vækst Gain	Foster Embryo	I alt Total	
1- 4	4,7	0,2	-	4,9	$y \times 0,44^1)$
5- 8	4,7	0,6	-	5,3	
9-12	4,7	1,0	-	5,7	
13-16	4,8	1,0	-	5,8	
17-20	4,8	1,2	-	6,0	
21-24	4,8	1,4	-	6,2	
uge					
25.-12.dr.uge ²⁾	5,0	1,9	-	6,9	
13.-16.dr.uge	5,0	1,9	0,2	7,1	
17.-20.dr.uge	5,0	1,8	0,3	7,1	
21.-24.dr.uge	5,0	1,7	0,4	7,1	
25.-28.dr.uge	5,1	1,4	0,6	7,1	
28.-32.dr.uge	5,1	1,1	0,9	7,1	
33.-36.dr.uge	5,1	0,8	1,2	7,1	
37.-40.dr.uge	5,1	0,5	1,9	7,5	

1) Gælder for alle laktationsstadier (y = daglig ydelse i kg 4% mælk).

2) Valid during the whole lactation (y = daily milk yield, kg of 4% FCM).

2) Drægtighedsuge. Week of pregnancy.

Tabel 5.31 Foderforbrug i 2. laktation, FE pr. ko dagligt.

Table 5.31 Daily food intake during 2nd lactation, SFU per cow.

Lakt.stadium uger Time of lact. weeks	Basisfoder (Basal food)				Produkt.foder Food for milk production
	Vedligehold. Maintenance	Til- vækst Gain	Foster Embryo	I alt Total	
1- 4	5,1	ne-	-	5,1	$(y-4) \times 0,44^1)$
5- 8	5,1	ga-	-	5,1	
9-12	5,1	tiv	-	5,1	
13-16	5,1	0,8	-	5,9	$y \times 0,44^2)$
17-20	5,1	1,2	-	6,3	
21-24	5,1	1,6	-	6,7	
uge					
25.-12.dr.uge ³⁾	5,3	1,8	-	7,1	
13.-16.dr.uge	5,3	1,8	0,2	7,3	
17.-20.dr.uge	5,3	1,7	0,3	7,3	
21.-24.dr.uge	5,3	1,6	0,4	7,3	
25.-28.dr.uge	5,3	1,1	0,6	7,0	
29.-32.dr.uge	5,3	0,8	0,9	7,0	
33.-36.dr.uge	5,3	0,5	1,2	7,0	
37.-40.dr.uge	5,3	0,5	1,9	7,7	

1) y = daglig ydelse i kg 4% mælk. y = daily milk yield, kg of 4% FCM.

2) Formlen gælder for resten af laktationen.

The formula is valid during the whole lactation.

3) Drægtighedsuge. Week of pregnancy.

Tabel 5.32 Foderforbrug i 3. laktation, FE pr. ko dagligt.

Table 5.32 Daily food intake during 3rd lactation, SFU per cow.

Lakt.stadium uger Time of lact. weeks	Basisfoder (Basal food)				Produkt.foder Food for milk production
	Vedligehold. Maintenance	Til- vækst Gain	Foster Embryo	I alt Total	
1- 4	5,3	ne-	-	5,3	(y-8) x 0,44
5- 8	5,3	ga-	-	5,3	(y-4) x 0,44
9-12	5,3	tiv	-	5,3	(y-2) x 0,44
13-16	5,2	0,7	-	5,9	y x 0,44
17-20	5,2	1,2	-	6,4	
21-24	5,2	1,7	-	6,9	
uge					
25.-12.dr.uge	5,4	1,9	-	7,3	
13.-16.dr.uge	5,4	1,9	0,2	7,5	
17.-20.dr.uge	5,4	1,8	0,3	7,5	
21.-24.dr.uge	5,4	1,7	0,4	7,5	
25.-28.dr.uge	5,5	1,1	0,6	7,2	
29.-32.dr.uge	5,5	0,8	0,9	7,2	
33.-36.dr.uge	5,5	0,5	1,2	7,2	
37.-40.dr.uge	5,5	0,5	1,9	7,9	

Se fodnoter til tabel 5.31. See footnotes for table 5.31.

Tabel 5.33 Foderforbrug i 4. og 5. laktation, FE pr. ko pr. dag.

Table 5.33 Daily food intake during 4th and 5th lactation, SFU per cow.

Lakt.stadium uger Time of lact. weeks	Basisfoder (Basal food)				Produkt.foder Food for milk production
	Vedligehold. Maintenance	Til- vækst Gain	Foster Embryo	I alt Total	
1- 4	5,5	ne-	-	5,5	(y-9) x 0,44
5- 8	5,5	ga-	-	5,5	(y-6) x 0,44
9-12	5,5	tiv	-	5,5	(y-3) x 0,44
13-16	5,4	0,5	-	5,9	y x 0,44
17-20	5,4	1,2	-	6,6	
21-24	5,4	1,9	-	7,3	
uge					
25.-12.dr.uge	5,6	1,9	-	7,5	
13.-16.dr.uge	5,6	1,9	0,2	7,7	
17.-20.dr.uge	5,6	1,8	0,3	7,7	
21.-24.dr.uge	5,6	1,7	0,4	7,7	
25.-28.dr.uge	5,7	1,1	0,6	7,4	
29.-32.dr.uge	5,7	0,8	0,9	7,4	
33.-36.dr.uge	5,7	0,5	1,2	7,4	
37.-40.dr.uge	5,7	0,5	1,9	8,1	

Se fodnoter til tabel 5.31. See footnotes for table 5.31.

5.2.3 Spædekalv

Kun i skridt, der begynder 36 uger efter kælvning, samt hvis procesen er i tilstand 177 (udskiftningstilstanden), fødes en kalv i løbet af skridtet. I tilstand 177 finder kælvningen sted 4 uger efter skridtets begyndelse (se afsnit 4.3). I øvrige tilfælde afhænger tids punktet af kælvningsintervallets længde. Er dette således 11 måneder = 48 uger, fødes kalven $48-36 = 12$ uger inde i skridtet. Analogt for andre kælvningsintervaller.

5.2.4 Kælvekvie og udsat ko

Køb af kælvekvie forekommer kun i tilstand 177. Som omtalt i afsnit 4.3 antages en sådan kvie at indgå i malkekobesætningen 4 uger inde i det pågældende skridt.

Udsætning af køer kan derimod ske i en hvilken som helst tilstand. Da slagtekører afregnes efter vægt, er det nødvendigt at kende middel vægten af en ko på de forskellige udsætningstidspunkter. I tabel 5.34 er derfor vist middelvægten af en ko på relevante tidspunkter. Tabellen er konstrueret ud fra en standard vækstkurve for køer af RDM og SDM.

Da prisen imidlertid er højere for unge køer end for ældre, skelnes der mellem disse to kategorier, og grænsen sættes, hvad dette angår, mellem 12 og 16 uger efter kælvning i 2. laktation.

Udsættes en ko som følge af beslutning 2 (numrene svarer til de i afsnit 4.1 anvendte for de enkelte beslutninger), afgår den ved skridtets begyndelse, og vægten kan aflæses direkte af tabellen. Træffes beslutning 3 eller 4 derimod, sker udsætningen henholdsvis 4 eller 8 uger inde i skridtet. Hvis tidspunktet i laktationen er 12 eller 24 uger, beregnes vægten ved lineær interpolation i tabellen 5.34. Er tidspunktet 36 uger, lægges henholdsvis 10 og 20 kg til vægten ved 36 uger ved beslutning 3 og 4.

Hvis en ko afgår ufrivilligt ved beslutning 1, vil det ske ved slutningen af et skridt, og vægten kan da umiddelbart aflæses af tabel 5.34.

Tabel 5.34 Gennemsnitligt vægtforløb.

Table 5.34 Average weight in various weeks of lactation.

Laktationsnummer Lactation number	Uger efter kælvning Weeks after calving	Vægt, kg Weight, kg
1	0	480
1	12	490
1	24	510
1	36	540
2	12	540
2	24	560
2	36	590
3	12	560
3	24	580
3	36	610
4	12	580
4	24	600
4	36	640
5	36	650

5.3 Økonomisk resultat for et skridt

Det forventede økonomiske resultat eller udbytte afhænger af tilstand og beslutning, og det betegnes r_i^k , hvor i angiver tilstanden ($i = 1, \dots, 177$) og k beslutningen ($k = 1, \dots, 4$). Det udregnes ud fra de i afsnit 5.2 beregnede fysiske kvantiteter af mælk, foder, spædekalv, kælvekvie og udsætterko i de enkelte 4 ugers perioder. For at korrigere for tidsforskydningen inden for et skridt, diskonteres disse fysiske kvantiteter hver 4-ugers periode for sig til skridtets begyndelse. I hver tilstand fås da en vektor af summerede diskonterede fysiske kvantiteter. Multiplieres denne vektor så med en prisvektor, hvor hver enkelt element angiver prisen på en "vare" med negative priser for køb og positive for salg, fås det samlede diskonterede økonomiske udbytte af skridtet.

Kun fremgangsmåden vil blive beskrevet her, idet selve udregningen først sker i det EDB-program, der er skrevet til denne optimering. I dette program er de i tabellerne 5.26 til 5.34 viste sammenhænge og forudsætninger m.v. indlæst, og det økonomiske udbytte beregnes da automatisk ud fra individuelle specificerede priser og rente. Herved opnås en fleksibilitet, hvor enkeltforudsætninger uden videre kan ændres, såfremt der tilvejebringes bedre estimerater eller revideerde skøn.

Den mest komplicerede situation opstår, når beslutning 1 ("behold") træffes. I så fald afhænger udbyttet af, om koen må udsættes ufriviligt som følge af for langt kælvningsinterval (kun aktuelt i skridtet fra 24 til 36 uger) eller sygdom m.v., eller koen fortsætter i besætningen. De tre situationer behandles nu hver for sig.

Situation a: Koen fortsætter i besætningen.

I så fald fås det økonomiske udbytte ved i hver tilstand at danne en vektor bestående af summerede diskonterede fysiske kvantiteter af mælk, basisfoder, produktionsfoder, kalv (hvis en kælvning finder sted) og kælvekvie (forekommer kun i tilstand 177). Denne vektor multipliceres med den tilsvarende prisvektor (hvis elementer regnes med fortegn), og det resulterende udbytte betegnes $r_i^1 (a_i)$.

Situation b: Koen udgår på grund af for langt kælvningsinterval, men er i øvrigt rask.

Her tilføjes til de under a nævnte vektorer henholdsvis den diskonte-

rede vægt af en ko ved slutningen af skridtet og prisen pr. kg levende vægt af en ko af den pågældende alder. Det af vektormultiplikationen resulterende udbytte betegnes $r_i^1(b_i)$.

Situation c: Koen udgår på grund af forhold, der ikke vedrører de 4 tilstandsværdier som f.eks. sygdom eller dødsfald.

Beregningen foretages som under b med den undtagelse, at der er tale om en syg ko (undertiden endog død), som ikke er så meget værd som en sund ko. Prisen pr. kg for koen må derfor multipliceres med en faktor, som kan specificeres frit (ved optimeringen sættes denne reduktionsfaktor til 0,5). Denne faktor er en sammenvejet pris på syge og døde dyr i forhold til prisen på en sund ko. Uddyttet betegnes i denne situation $r_i(c_i)$.

Ved begyndelsen af skridtet vides ikke, om det vil forløbe i overensstemmelse med a, b eller c, men det er muligt at beregne følgende sandsynlighedsfordeling for de tre forløb:

$$P(a_i) = 1 - p_{i177}^1 \quad (5.17)$$

$$P(b_i) = p_{i177}^1 - (1 - o(n_i, t_i)) \quad (5.18)$$

$$P(c_i) = 1 - o(n_i, t_i) \quad (5.19)$$

- hvor p_{i177}^1 betegner overgangssandsynligheden fra tilstand i til 177, når koen beholdes (beslutning 1), og $o(n_i, t_i)$ betegner overlevelsessandsynligheden for et skridt, hvor laktationsnummeret er n_i og tidspunktet i laktionen er t_i uger efter kælvning - se i øvrigt tabel 4.3.

Det kontrolleres let, at $P(a_i) + P(b_i) + P(c_i) = 1$, og nu fås:

$$r_i^1 = r_i^1(a_i) \cdot P(a_i) + r_i^1(b_i) \cdot P(b_i) + r_i^1(c_i) \cdot P(c_i) \quad (5.20)$$

Træffes beslutning 2 ("udskift straks") multipliceres vægten af en ko ved skridtets begyndelse med prisen pr. kg for en ung eller en gammel ko afhængigt af tilstanden. Herved findes r_i^2 direkte.

Ved beslutning 3 ("udskift om 4 uger") er der to muligheder. Koen udsættes under alle omstændigheder efter 4 uger, men på dette tidspunkt kan den enten være rask eller syg. Fra tabel 4.1 kendes sandsynligheden for, at koen ikke bliver syg i hele skridtet. Hvis tidspunktet i laktionen er 12 eller 24 uger, vil sandsynligheden for,

at koen ikke er blevet syg i løbet af de 4 uger før udskiftning, være $\sqrt[3]{0(n_i, t_i)}$.

Er tidspunktet imidlertid 36 uger efter kælvning, vil skridtet indeholde en kælvning, hvor sandsynligheden for sygdom må anses for større end i resten af skridtet. Det er derfor ikke rimeligt at fordele sandsynligheden jævnt over hele skridtet i denne situation. I stedet antages, at sandsynligheden for, at koen er rask efter de 4 uger før udskiftning, er $\sqrt[3]{0(n_i, 24)}$. Der anvendes således samme sandsynlighed som for den tilsvarende periode i foregående skridt.

a) Er koen rask, bliver det økonomiske udbytte $r_i^3(a_i)$ lig med mælkemængde og foderforbrug fra de fire uger diskonteret til begyndelsen af skridtet og multipliceret med de respektive priser plus den diskonterede vægt af koen efter 4 uger multipliceret med prisen pr. kg for en ko af den pågældende alder.

b) Er koen syg, beregnes $r_i^3(b_i)$ på samme måde med undtagelse af, at prisen på koen må reduceres til det halve (jvf. den tidligere i dette afsnit nævnte faktor, 0,5).

r_i^3 beregnes nu analogt med r_i^1 :

$$r_i^3 = r_i^3(a_i) \cdot P(a_i) + r_i^3(b_i) \cdot (1-P(a_i)) \quad (5.21)$$

- hvor beregningen af $P(a_i)$ er omtalt tidligere.

Beslutning 4 ("udskift om 8 uger") behandles analogt med beslutning 3. Dog er sandsynligheden for, at koen er rask efter otte uger ($\sqrt[3]{0(n_i, t_i)}$)².

I skridt, der begynder 36 uger efter kælvning dog $(\sqrt[3]{0(n_i, 24)})^2$. Endvidere er der den forskel, at r_i^4 omfatter produktion og forbrug for 8 uger mod 4 for r_i^3 .

Antallet af 4-ugers perioder i løbet af et skridt er 3, hvis det begynder 12 eller 24 uger efter kælvning. Begynder det derimod 36 uger efter kælvning, afhænger antallet af kælvningsintervallets (KI) længde, som imidlertid regnes i måneder. Ved 11 måneders KI er der ingen problemer, idet 11 måneder er lig med 12 4-ugers perioder. Tilsvarende er 16,5 måneder lig med 18 4-ugers perioder.

13 måneders KI svarer derimod til 396 dage, mens 14 4-ugers perioder kun er 392 dage. Tilsvarende er 15 måneder lig med 458 dage, og 16 4-ugersperioder svarer til 448 dage. Imidlertid fremgår det af tabel

5.2., at der vil være betydeligt flere kælvningsintervaller mellem 12 og 13 og mellem 14 og 15, end der vil være henholdsvis mellem 13 og 14 og mellem 15 og 16 måneder. Middelværdien i intervallerne 12-14 og 14-16 vil således ligge under henholdsvis 13 og 15 måneder.

På denne baggrund skønnes det rimeligt at regne med, at intervaller på "13" og "15" måneder svarer til henholdsvis 14 og 16 4-ugers perioder.

I tilstand 177 (udskiftningstilstanden - se afsnit 4.1) vil der være 4 4-ugers perioder. Specielt for denne tilstand er det økonomiske udbytte uafhængigt af beslutningen. r_{177} beregnes ud fra den diskonterede værdi af en kælvekvie samt produktion og foderforbrug for en middelgod kvie de første tolv uger af 1. laktation.

5.4 Diskonteringsfaktorer

Foruden den tidligere omtalte diskontering inden for et skridt, må der også diskonteres mellem skridt for at korrigere for tidsforskydningen.

Som omtalt i afsnit A.1 (appendiks A) er det i denne forbindelse nødvendigt at kende diskonteringsfaktoren fra begyndelsen af næste skridt til begyndelsen af det nuværende. Denne faktor afhænger kun af renten samt længden af nuværende skridt, som er givet ved tilstand og beslutning (i og k). Antages renten at være udefra givet, afhænger diskonteringsfaktoren b således kun af parametrene i og k, og sammenhængen er:

$$b_i^k = e^{-R \cdot L(i,k)} \quad (5.22)$$

- hvor e er 2,718 (d.v.s. grundtallet for den naturlige logaritme), R er renten og $L(i,k)$ er længden af et skridt, hvor tilstanden er i og beslutningen k.

b_i^k afhænger således i høj grad af renten, og i tabel 5.35 er vist eksempler på faktoren ved forskelligt renteniveau for relevante skridtlængder.

Hermed er alle parametre, der er nødvendige for optimering af modelen, udledt.

Tabel 5.35 Diskonteringsfaktorer for forskellige kombinationer af rente og skridtlængde.

Table 5.35 Discount factors at various combinations of interest rate and stage length.

Årlig rente, procent <i>Annual interest rate, percent</i>	Skridtlængde, uger (Stage length, weeks)						
	0	4	8	12	48	56	64
5	1 ,996	,992	,989	,955	,948	,940	
10	1 ,992	,985	,977	,912	,898	,884	
15	1 ,989	,977	,966	,871	,851	,831	
20	1 ,985	,970	,955	,831	,806	,782	
25	1 ,981	,962	,944	,794	,764	,735	
30	1 ,977	,955	,933	,758	,724	,691	

6

OPTIMERING OG RESULTATER

6.1 Optimeringsprogram

Der findes i alt tre principielt forskellige optimeringsalgoritmer for Markovkæde-modeller (se appendikset afsnit A.1). Kristensen (1982) afprøvede samtlige algoritmer og konkluderede, at den såkaldte policy-iteration algoritme var langt den mest effektive, skønt de to øvrige dog også var brugbare. Endvidere konkluderedes, at datamatsproget SAS var velegnet til programmering af algoritmen.

Som det fremgår af appendikset (A.1) bygger optimeringen ved denne teknik på matrixoperationer i mange dimensioner (her op til 177 x 177). Den særlige matrixprocedure i SAS (PROC MATRIX) udgør et fuldstændigt programmeringssprog baseret på matricer i vilkårlige dimensioner. Det er muligt at udføre enhver tænkelig operation på matricer med maksimalt 32767 elementer (kvadratroden af dette tal fastsætter den øverste grænse på 181 for antallet af tilstænde - se afsnit 4.1).

Policy-iteration algoritmen programmeredes derfor i SAS, og programmet, som med ca. 1650 programlinjer er for stort til at blive vist her, vil kort blive beskrevet i det følgende.

Udgangspunktet for programmet er et datasæt, der for hver enkelt ko i en given besætning indeholder følgende oplysninger:

- 1) Besætning
- 2) Konummer
- 3) Laktationsnummer
- 4) 308-dages ydelser i kg 4% mælk for alle foregående laktationer
- 5) Forventet 308-dages ydelse i kg 4% mælk for indefærende laktation
- 6) Dato for hver enkelt af koens kælvninger
- 7) Dato for seneste inseminering i indefærende laktation
- 8) Dato for seneste kontrollering

På grundlag af disse oplysninger beregnes tilstanden for hver enkelt ko, der befinner sig umiddelbart efter 12, 24 eller 36 uger efter kælvning. Endvidere beregnes det alderscorr. ydelsesgns. (G) for besætningen. Herefter beregnes i hver enkelt af de 177 tilstænde den fysiske produktion og det fysiske forbrug i hver enkelt 4-ugers perio-

de under forudsætning af, at koen beholdes. Disse fysiske kvantiteter diskonteres da til begyndelsen af skridtet ved hjælp af en rente, som må specificeres i det enkelte tilfælde ud fra de forhold, den enkelte kvægbruger producerer under. De diskonterede fysiske kvantiteter beregnes for hver enkelt beslutning for sig. Endvidere må der specificeres et prissæt svarende til de aktuelle forhold, ligesom der må angives et sæt overlevelsessandsynligheder. Endelig må der specificeres en reduktionsfaktor for prisen på syge køer (se afsnit 5.3). Herefter kan det økonomiske udbytte beregnes i hver enkelt tilstand under de fire mulige beslutninger:

- 1) Behold koen
- 2) Udkift straks
- 3) Udkift om 4 uger
- 4) Udkift om 8 uger

Programmet udregner herefter overgangssandsynlighederne mellem tilstande under hver af de fire beslutninger ved hjælp af overlevelsessandsynligheder, sandsynlighedsfordelinger for kælvningsintervallets længde og overgangssandsynligheder med hensyn til mælkeproduktion.

Endelig må angives en rente til beregning af diskonteringsfaktorer mellem successive skridt. Denne rente behøver ikke at være den samme som den, der anvendes ved diskontering inden for et skridt, idet det i visse tilfælde kan være rimeligt at skelne mellem en langsigtet og en kortsigtet rente.

Antag således, at en kvægbruger har stor foderstofgæld. En fremskyndelse af indtægter med f.eks. 4 uger vil kunne nedbringe denne gæld, hvorved beløbet i de 4 uger reelt forrentes med en procent svarende til foderstofgældens høje renteniveau, som derfor bør anvendes ved diskontering på kort sigt. Ved diskontering på langt sigt er der tale om en mere fast kapitalanbringelse, hvor det er mere rimeligt at anvende et niveau svarende til f.eks. renten på prioritetsgæld, idet indtægter vanskeligt kan fremskyndes over en længere periode.

Såfremt der i modellen anvendes en høj rente ved diskontering inden for et skridt og en lavere ved diskontering mellem skridt vil ovennævnte overvejelser i nogen grad blive tilgodeset. Det er dog ikke noget særligt godt kriterium, idet der forekommer skridt som kun er 4 eller 8 uger lange. Mellem sådanne skridt burde der egentligt dis-

konteres med den høje rente, men da det ikke er muligt at skelne mellem lange og korte skridt, hvad dette angår, er den kortsigtede og den langsigtede rente regnet for ens i alle optimeringseksemplerne i dette kapitel, hvilket også retfærdiggøres af, at diskonteringsrenten i afsnit 6.5.3 påvises at have meget lille betydning for de optimale løsninger.

Herefter følger selve optimeringen som beskrevet i appendiks A.1, hvilket resulterer i en optimal udskiftningspolitik for besætningen i form af en optimal beslutning i hver enkelt tilstand. Endvidere beregnes i hver enkelt tilstand tabet ved at træffe hver enkelt af de ikke-optimale beslutninger. Disse tab beregnes ud fra formel (A.37). Et eksempel på udskrift af en optimal politik er vist i tabel B.12.

Denne optimale politik kædes nu via den tidligere nævnte beregning af tilstande for de enkelte køer, der befinner sig ved begyndelsen af et nyt skridt, sammen med de konkrete køer i den pågældende besætning. Resultatet bliver en liste over køer, der befinner sig ved begyndelsen af et skridt med angivelse af den optimale beslutning for den enkelte kø samt det økonomiske tab ved at træffe hver enkelt af de ikke-optimale beslutninger.

Herefter beregner programmet gevinsten (med fortegn) ved at beholde køen hele skridtet frem for at træffe hver enkelt af de øvrige tre beslutninger. Antag således at for en kø er beslutning 1 optimal. Tabet ved at følge denne beslutning vil derfor være nul, d.v.s. $tab_1 = 0$ (jfr. tabel B.12). Følges derimod beslutning 2 vil det være forbundet med det økonomiske tab, tab_2 . Gevinsten ved at beholde køen hele skridtet fremfor at udskifte den straks er da:

$$gevinst_2 = tab_2 - tab_1 \quad (6.1)$$

(6.1) gælder imidlertid generelt uanset hvilken af de 4 beslutninger, der er optimal. Hvis således beslutning 2 er optimal er $tab_2 = 0$ og gevinsten bliver som ventet negativ, idet tabene altid regnes positive (eller nul for optimale beslutninger).

Analogt beregnes gevinsten ved at beholde køen hele skridtet frem for at udskifte den om 4 eller 8 uger som henholdsvis $gevinst_3 = tab_3 - tab_1$ eller $gevinst_4 = tab_4 - tab_1$.

Programmet tænkes kørt hver 4. uge for hver besætning. Herved opnås, at de køer, der ved nuværende kørsel befinder sig ca. 16, 28 eller 40 uger efter kælvning og således ikke bliver vurderet, ved foregående kørsel befandt sig ca. 12, 24 eller 36 uger efter kælvning og derfor er blevet vurderet på dette tidspunkt. Tilsvarende vil køer, der nu befinder sig ca. 20, 32 eller 44 uger efter kælvning, være blevet vurderet ved kørslen 8 uger tidligere.

Efter 3 kørsler vil således alle køer, der i perioden har været mellem 12 og 44 uger efter kælvning, være blevet vurderet. Antag således, at en ko er vurderet for 4 uger siden og gevinst₂, gevinst₃ og gevinst₄ er beregnet. Gevinst₃ vil nu (4 uger senere) svare til gevinsten ved at beholde koen resten af skridtet frem for at udskifte den nu. Samme betydning vil gevinst₄ have for en ko, der er vurderet for 8 uger siden.

Det vil sige at gevinst₄ fra kørslen for 8 uger siden, gevinst₃ fra sidst foregående kørsel og gevinst₂ fra nuværende kørsel er analoge størrelser, som umiddelbart kan sammenlignes. Samtlige køer fra 3 på hinanden følgende kørsler samles derfor med disse samhørende gevinstmål, som under et betegnes gevinst. Kørerne sorteres da efter stigende gevinst, og programmet udskriver en liste over den indbyrdes prioritering af køerne.

Øverst vil stå køer med negativ gevinst, hvilket vil sige, at det bedst betaler sig, at udskifte dem. Herefter følger køer med gevinst omkring 0, hvilket betyder, at de befinner sig på grænsen af udskifting, og sidst følger køer med stigende positiv gevinst, idet der er tale om køer, som bør beholdes.

6.2 Optimal politik under givne forudsætninger

I tabel B.12 er vist en udskrift af en optimal udskiftningspolitik for gården H 64-2 under Helårsforsøg med Kvæg i april 1982. Ved optimeringen specificeredes følgende forudsætninger:

Overlevelsessandsynligheder: Middel sundhed (se tabel 4.3)

Langsigtet rente = kortsigtet rente = 20%

Reduktionsfaktor for prisen på syge køer: 0,5

Priser: Fremgår af tabel 6.1.

Tabel 6.1 Standard prissæt.

Table 6.1 Standard prices.

"Vare" Item	Enhed Unit	Pris pr. enhed Price per unit.
Mælk (milk)	kg 4% (FCM)	2,00 kr
Basisfoder (basical food)	FE (SFU)	1,00 -
Prod.foder (Food for milkprod)	FE (SFU)	1,60 -
Kalv (calf)	1 stk. (1 calf)	1220,00 -
Kælvekvie (heifer)	1 stk. (1 heifer)	8100,00 -
Ung udsætterko ¹⁾ <i>Young cow</i>	kg levende vægt kg live weight	10,00 -
G1. udsætterko ¹⁾ <i>Older cow</i>	kg levende vægt kg live weight	9,50 -

1) Grænsen mellem "ung" og "gammel" går mellem 12 og 16 uger i 2. laktation.

The upper limit of "young" is between 12 and 16 weeks after 2nd calving.

Med mindre andet fremgår, refererer alle resultater i det følgende til ovennævnte forudsætninger. Når systemet tages i brug i praksis, vil disse forudsætninger blive indberettet på et skema som vist i figur 6.1.

De forskellige søjler i tabel B.12 har følgende betydning:

Første søjle identifierer tilstanden ved dens nummer. Herefter følger 4 søjler, der angiver tilstandsvariablenes værdi i den pågældende tilstand - laktationsnummer (kælvningsnummer), laktationsstadium (tidspunkt i laktationen målt i uger efter kælvning), ydelse (angivet ved niveau - små tal svarer til lav ydelse) og kælvningsintervallets længde i måneder (en prik betyder at intervallets længde ikke kan fastlægges på det pågældende tidspunkt i laktationen).

6. søjle angiver den optimale beslutning i tilstanden, hvorefter følger et mål for det økonomiske udbytte betegnet aflønning til stald og arbejde. Ved optimeringen beregnes nutidsværdien, som er den diskonterede værdi af alle fremtidige nettoindbetalinger, (se formel (A.24))

Oplysninger til beregning af
OPTIMALT UDSKIFTNINGSTIDSPUNKT FOR MALKEKØER AF DE TUNGE RACER

1. Kontrolforeningsidentitet:

,	,	,	,
---	---	---	---

2. Forudsætningerne gælder fra datoens:

,	,	,
år	md.	dag

3. Sundhedsniveau (Højt = 1, middel = 2, lavt = 3):

--

4. Unge udsætterkøer, kr. pr. kg levende vægt:

,	,
kr.	øre

5. Äldre udsætterkøer, kr. pr. kg levende vægt:

,	,
kr.	øre

6. Kælvekvier, kr. pr. stk. (hele hundreder):

,	,	,	,
---	---	---	---

7. Kalve, tyre- og kvie-, kr. pr. stk. (ca. 15% af "6"):

,	,	,
---	---	---

8. Mælkepris, kr. pr. kg 4% mælk:

,	,
kr.	øre

9. Foder til vedligeholdelse, foster og tilvækst,
kr. pr. FE:

,	,
kr.	øre

10. Foder til mælkeprod. (A-bl., græsensil. o.l.)
kr. pr. FE:

,	,
kr.	øre

11. Rente, procent pro anno (helt tal):

,

Optisk læsbar skrift ved brug af: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Fig. 6.1 Skema for indberetning af besætningens sundhedsniveau og økonomiske forudsætninger.

og appendiks A.1 i øvrigt for en nærmere beskrivelse af dette begreb). Aflønning til stald og arbejde findes da som nutidsværdien multipliceret med rentefoden. Det resulterende beløb er den forventede årlige aflønning i gennemsnit for den betragtede ko og dens succesive efterfølgere i fremtiden. Beløbet kan således ikke vurderes særskilt i den enkelte tilstand, men niveauet må betragtes under et for alle tilstændte og vurderes i forhold til aflønning til stald og arbejde beregnet i andre sammenhænge - f.eks. i den årlige beretning fra Helårsforsøg med Kvæg.

De sidste 4 søjler angiver tabet ved at træffe hver enkelt af de 4 beslutninger i forhold til den optimale. For den optimale beslutning er dette tab nul.

Hvad angår resultater, fremgår det, at i 1. laktation skal der kun frivilligt udskiftes meget få dyr. I 2. laktation bør der være lidt større udskiftning, og i 3. og 4. laktation endnu større.

Det ses, at 12 uger efter kælvning i alle tilfælde er for tidligt at udskifte. Selv i den laveste ydelsesgruppe kan det i reglen betale sig at beholde kørne i det mindste til 20 eller 24 uger efter kælvning. Det er dog et problem, at den laveste ydelsesgruppe ikke er nedadtil begrænset. Visse køer, der henføres til denne gruppe, vil derfor formentlig have så lav en ydelse, at de bør udskiftes på trods af resultatet i tabel B.12. Sådanne situationer må dog klares uden om modellen, hvortil relativt enkle kriterier kan tages i anvendelse (se kapitel 7).

Ved samme laktationsnummer og -stadium er det i alle tilfælde de lavestydende der skal udskiftes, og indenfor samme ydelsesgruppe er det de køer, der har længst kælvningsinterval. Dette er i overensstemmelse med, hvad der måtte forventes, og er dermed en bekræftelse af modellen.

Det økonomiske udbytte vurderes bedst af aflønningen til stald og arbejde, idet denne udtrykker forventet årlig middeludbytte. Når det tages i betragtning, at udbyttet i modellen er defineret som indtægter fra salg af mælk, kalve og udsætterkører minus udgifter til foder og kælvekvier er niveauet i tabellen absolut rimeligt og i overensstemmelse med de næsten tilsvarende tal fra hovedresultater i helårsforsøgsbrugene (532. beretning fra Statens Husdyrbrugsforsøg 1982).

Det mest interessante er dog de 4 sidste kolonner vedrørende tabet ved visse ikke-optimale beslutninger. Betragtes eksempelvist tilstand 1 til 5, ses, at den optimale beslutning i alle tilfælde er "behold koen". I den lavest ydende tilstand er tabet ved straks at udskifte koen 511 kr, og i den højest ydende er det tilsvarende tab 3154 kr. Disse tal er således et mål for, hvor afgørende det er at træffe den optimale beslutning.

I disse tilstænde er tabet størst ved at udskifte straks, men falder hvis der ventes 4 eller 8 uger. dette er udtryk for, at jo længere der ventes, jo mindre bliver dagsydelsen, og dermed bliver tabet mindre ved at udskifte.

I tilstand 8 ses et eksempel på at alle 4 beslutninger er næsten lige fordelagtige. I en sådan situation bør andre forhold som malkbarhed, temperament eller kvaliteten af den kvie, der skal indgå i stedet, afgøre hvilken beslutning, der træffes.

I tilstand 69 ses et eksempel, hvor det er optimalt at beholde koen. Tabet ved at udskifte straks er 805 kr og stiger til 1591 kr, hvis der udskiftes om 8 uger. Grunden til dette er, at der er tale om en drægtig ko, der befinner sig 36 uger efter kælvning. Jo tættere koen kommer til kælvningstidspunktet, jo mere stiger dens værdi på grund af den forventede kalv og den øgede mælkeproduktion. Hvis en sådan ko derfor skal udskiftes, bør det ske hurtigst muligt.

En nærmere vurdering af resultaterne i tabel B.12 bekræfter, at modellen fungerer logisk, og intet giver anledning til principielle indvendinger.

6.3 Resultater vedrørende konkrete køer

I tabel B.13 er vist et eksempel på udskrift af optimale beslutninger for de enkelte køer på helårsforsøgsbruget H 64-2. Som nævnt i afsnit 6.1 omfatter en sådan liste alle køer, der befinner sig ved begyndelsen af et skridt. Resultatet vedrører april 1982.

De enkelte søjler i tabellen har samme betydning som i tabel B.12. Dog er koens nummer tilføjet som første søjle og gårdenes nummer i overskriften. Endvidere er ydelsesniveauet anført med ord i stedet for tal. Kørerne er i oversigten oprangeret efter stigende nummer, d.v.s. med de ældste først.

I modsætning til tabel B.12, som mest har teoretisk interesse, tænkes denne tabel udsendt til driftslederen, idet den giver værdifuld information om de enkelte køer. Tabellens brug vil blive illustreret ved at fremhæve enkelte typiske køer.

Først betragtes ko nr. 280. Det fremgår, at den optimale beslutning er at beholde koen hele skridtet. Imidlertid er tabet ved straks at udskifte den kun 139 kr. Denne information kan driftslederen nu sætte i relation til sin øvrige viden om koen. Er der således tale om et dyr med et vanskeligt temperament, vil han kunne sætte denne ulempe i relation til tabet ved at udskifte den og formentlig konkludere, at han er parat til at udskifte koen på trods af det økonomiske tab. Var der derimod tale om en ko nr. 394, hvor det tilsvarende tab er 3206 kr, ville koen næppe blive udskiftet, selv hvis dens temperament var meget vanskeligt.

Nr. 280 vil dog også i mange andre tilfælde kunne udskiftes med fordel. Hvis der således på grund af afstamningen er særligt store forventninger til den nye kvie, bør den udskiftes. Tilsvarende hvis koen forventes at kunne indbringe mere ved salg end forudsat i modellen, skal den også udskiftes. Denne situation kan f.eks. opstå ved pludseelig stigning i salgsprisen uden at dette er nået at blive indberettet, eller hvis det er muligt at afsætte koen tilavl til en pris, der overstiger slagteværdien. Selv ved uændrede priser behøver den dog kun at veje 14 kg mere end forudsat (se tabel 5.34), for at det bliver fordelagtigt at udskifte.

Er der sygdomsproblemer med koen, sådan at det bliver nødvendigt med dyrlægebehandling, eller hvis det bevirket, at ydelsen forventes at blive bare 70 kg 4% mælk mindre i skridtet end normalt, kan det heller ikke betale sig at beholde.

Derimod skal der i alle tilfælde meget kraftige afvigelser fra forudsætningerne til før ko nr. 394 bør udskiftes. Der kan således accepteres dyrlægeregninger eller ydelsesnedgang til en værdi af lidt over 3000 kr, før det ikke kan betale sig at beholde denne ko.

Hvad angår ko nr. 251, er den optimale beslutning at beholde den. Hvis den imidlertid af andre grunde alligevel ønskes utsat, bør det overvejes at vente 8 uger, idet tabet da kun bliver 1084 kr mod 1904, hvis den udskiftes straks.

Ko nr. 339 bør udskiftes, idet den 36 uger efter 2. kælvning endnu ikke er drættig. Imidlertid er der ikke angivet noget tab ved ikke at følge denne beslutning. Dette skyldes, at tabet er stærkt afhængigt

af, om koen snart bliver drægtig, eller der går lang tid. Bliver den således drægtig allerede i 37. uge, vil det muligvis kunne betale sig at beholde den (dog stærkt afhængigt af dens ydelsespotentiale). Går der øerimod lang tid før drægtighed kan konstateres (eller hvis den slet ikke bliver drægtig), vil koen have en meget lav værdi i konkurrence med en kælvekvie.

Undertiden kan det være fordelagtigt at vente lidt længere med udskiftning af en ko end modellen foreskriver. Er der således forventninger om, at afregningsprisen vil stige, vil den marginale værdi af en evt. tilvækst være betragtelig, og dermed begrunde en udskydning af udskiftningstidspunktet (jvf. kapitel 1).

En særlig situation opstår, hvis det i følge tabel B.13 er optimalt at udskifte en ko, og der ikke er en kælvekvie til rådighed til afløsning. Det vil da ofte være fordelagtigt alligevel at beholde koen, idet den kun behøver at have positivt dækningsbidrag, når pladsen ellers ville stå tom. Hvorvidt det daglige dækningsbidrag er positivt under de gældende priser kan aflæses af tabellerne 1.1 og 1.2 samt B.15.

Formålet med tabel B.13 er for det første, at fortælle driftslederen, hvad der er optimalt at gøre med den enkelte ko under de forudsætninger, der er indkodet i modellen. Et andet formål er at oplyse, hvad det økonomiske tab vil være, hvis den optimale beslutning ikke følges, så det bliver muligt at afveje disse tab mod dels ikke økonomiske forhold og dels forhold, der afviger fra de opstillede forudsætninger, hos den konkrete ko.

Med en oversigt som tabel B.13 vil driftslederen få værdifuld information til brug ved beslutning om udskiftning.

6.4 Resultater vedrørende den indbyrdes prioritering af køer

I tabel B.14 er vist et eksempel på udskrift af den indbyrdes prioritering af køerne på gården H 64-2. Listen omfatter køer, der er vurderet i tabel B.13, samt køer vurderet ved de to foregående kørsler som omtalt i afsnit 6.1. Også denne tabel tænkes udsendt til driftslederen, idet den er af stor værdi ved beslutning om udskiftning.

De første 5 søjler har samme betydning som i tabel B.13. Herefter følger den økonomiske gevinst ved at beholde koen resten af skridtet frem for at udskifte den nu. Sidste søjle angiver dato'en for den kontrolleering, efter hvilken koen er vurderet. Datoen er angivet på formen år-måned-dag. Køer, hvor denne dato er 7. april 82, kan genfindes i

tabel B.13.

Denne prioriteringsliste giver måske den mest værdifulde information, idet den omfatter samtlige køer mellem 12 og 44 uger efter kælvning med de lavest prioriterede køer øverst. Denne prioritering er uafhængig af, om der udskiftes med en kælvekvie eller besætningsstørrelsen i stedet reduceres, hvilket specielt er væsentligt for landmænd, der ikke ønsker at indkøbe kælvekvier og derfor ikke altid har en kvie parat til indsætning.

Udskiftningstidspunkterne vil i et sådant tilfælde oftest være bestemt af, hvornår de nye kvier kælver. Køerne bør da så vidt muligt udsættes efter rækkefølgen i tabel B.14 (de øverste først). I særlige tilfælde - f.eks. lav ydelse forårsaget af ikke-kronisk sygdom hos en iøvrigt højt prioriteret ko - kan rækkefølgen dog fraviges. Kvier, der på grund af afstamning næres små forventninger til, bør dog i reglen søges solgt i stedet for at lade dem indgå til afløsning af køer, der i følge tabel B.13 bør beholdes.

6.5 Følsomhedsanalyser

En vurdering, af de i tabel B.12 til B.14 viste resultaters stabilitet ved ændring af visse forudsætninger, er af stor betydning for hvor stor vægt, der skal lægges på resultaterne. Følsomheden undersøges ved ændringer i overlevelsessandsynligheder, priser og rente. Resultaterne er i hovedtræk vist i tabel 6.2; men i det følgende gives en mere uddybende præsentation.

6.5.1 Overlevelsessandsynligheder

De hidtil viste resultater svarer alle til middel sundhed i henhold til tabel 4.1. Da overlevelsessandsynlighederne er skønnede (ikke estimerede) vil en undersøgelse af følsomheden overfor ændringer i disse være af særlig interesse. Viser de sig nemlig at være af stor betydning, bør der senere ydes en væsentlig indsats for at estimere dem.

Først optimeredes med overlevelsessandsynlighederne svarende til lav sundhed

Tabel 6.2 Summarisk præsentation af resultater fra følsomhedsanalyser.

Ændret forudsætning ¹⁾	Betydning for:		
	Optimale beslutninger	Indbyrdes prioritering	Årligt udbytte, kr pr. ko
Høj sundhed ²⁾	nogen	lille	300 til 400
Lav sundhed ²⁾	nogen	lille	-100 til -600
Reduktionsfaktor, syge køer 0,75	lille	meget lille	200 til 250
Alle priser + 60%	ingen	ingen	+60%
Slagtepris + 10%	nogen	meget lille	200 til 300
Slagtepris + 20%	stor	meget lille	400 til 600
Pris på kælvekvie + 10%	nogen	meget lille	-300 til -400
Pris på kælvekvie + 20%	stor	lille	-500 til -800
Pris på kalv + 10%	meget lille	meget lille	100 til 150
Priser på alle dyr + 10%	meget lille	meget lille	±40
Pris på mælk + 10%	meget lille	meget lille	1200 till 1300
Pris på basisfoder + 10%	meget lille	meget lille	-200 til -300
Pris på prod.foder + 10%	meget lille	meget lille	-400 til -500
Pris på alt foder + 10%	meget lille	meget lille	-600 til -700
Rente 10%	meget lille	meget lille	±150
Rente 30%	meget lille	meget lille	±250

1): I forhold til afsnit 6.2, tabel 6.1.

2): Se tabel 4.1.

3): Prioritering af udtrykkene: ingen, meget lille, lille, nogen, stor.

Table 6.2 Short presentation of results from the sensibility test.

Changed assumption ¹⁾	Influence on:		
	Optimal decisions	Priority list	Annual return, kr per cow
Good health ²⁾	some ³⁾	small	300 to 400
Bad health ²⁾	some	small	-100 to -600
Reduction factor, sick cows 0.75	small	diminutive	200 to 250
All prices + 60%	none	none	+60%
Price of replaced cows + 10%	some	diminutive	200 to 300
Price of replaced cows + 20%	large	diminutive	400 to 600
Price of heifer + 10%	some	diminutive	-300 to -400
Price of heifer + 20%	large	small	-500 to -800
Price of calf + 10%	diminutive	diminutive	100 to 150
Price of all animals + 10%	diminutive	diminutive	±40
Price of milk + 10%	diminutive	diminutive	1200 to 1300
Price of basical food + 10%	diminutive	diminutive	-200 to -300
Price of food for milk prod + 10%	diminutive	diminutive	-400 to -500
Price of all sorts of food + 10%	diminutive	diminutive	-600 to -700
Interest rate 10%	diminutive	diminutive	±150
Interest rate 30%	diminutive	diminutive	±250

1): As compared to section 6.2, table 6.1.

2): Average of herd as defined in table 4.1.

3): Priority of expression: none, diminutive, small, some, large.

i tabel 4.1. Dette førte til en noget forøget udskiftning undtagen i 1. laktation, hvilket kan forklares med, at hvis mange køer må udskiftes på grund af sygdom m.v. (og dermed indbringer en lavere pris), vil 1. laktationskører, med deres generelt højere overlevelsessandsynligheder bedre kunne hævde sig.

Virkningen på den indbyrdes prioritering undersøgtes ved denne og de følgende analyser ved hjælp af prioriteringslister omfattende køer vurderet i april 1982, d.v.s. de samme køer som forekommer i tabel B.13. Ved at ændre forudsætningerne fra middel til lav sundhed, skete der visse ændringer hovedsageligt blandt, de mellemprioriterede køer. Der var derimod ingen køer, der skiftede fra lav til høj prioritering eller omvendt. Den mest interessante del af listen er de lavest prioriterede, idet det er blandt disse, at udskiftningsemner skal findes. På denne del skete næsten ingen ændringer. Således forekom de fire lavest prioriterede køer i samme rækkefølge på begge lister.

Det økonomiske udbytte ved det laveste sundhedsniveau bliver mellem 100 og 600 kr lavere pr. ko pr. år afhængigt af tilstanden. For det høje sundhedsniveau øges det tilsvarende udbytte 300-400 kr.

Sammenfattende må konkluderes, at overlevelsessandsynlighederne har nogen indflydelse på de optimale beslutninger og en mindre på den indbyrdes prioritering.

6.5.2 Priser

Et særligt forhold vedrørende priserne er den faktor, hvormed specielt den sammenvejede pris på syge og døde køer reduceres. For at få et indtryk af denne faktors betydning ændredes den fra 0,5 til 0,75.

Den optimale politik ændredes kun i få tilstænde. I nogle tilfælde skiftede den optimale beslutning fra udskiftning på et tidligt tidspunkt til udskiftning 4 eller 8 uger senere, ligesom enkelte tilstænde skiftede til "behold". Forklaringen er, at jo længere en ko beholdes (betragtet fra et fast tidspunkt), jo større er risikoen for, at den bliver syg og evt. dør, inden den udskiftes. Hvis den sammenvejede værdi af en syg/død ko imidlertid er 75% (dog ret usandsynligt) i stedet for 50%, vil den økonomiske risiko ved at beholde koen, dog blive mindre. I nogle tilfælde kan det derfor betale sig at beholde koen længere, end hvis værdien kun var 50% af en sund ko.

Ændringerne i den indbyrdes prioritering af køer var meget lille, hvorimod det økonomiske udbytte naturligvis er steget. I værdi svarer stigningen til mellem 200 og 250 kr.

Umiddelbart må antages, at det er forholdet mellem indkøbte og solgte "varer" der er af betydning, således at en proportional stigning i alle priser ikke antages at have betydning. For at undersøge, om denne formodning er korrekt, hævedes alle priser 60%. Den eneste betydning dette fik, var at det økonomiske udbytte også steg 60%. De optimale beslutninger og den indbyrdes prioritering var uforandrede.

Øges derimod slagteprisen på udsætterkøerne separat, d.v.s. uden at kælvekvierne stiger tilsvarende, hvilket er det normale markedsbillede, bliver resultatet en noget kraftigere udskiftning særligt i de højere laktationsnumre. Hæves prisen således 20%, er det i 4. laktion, 24 uger efter kælvning kun den højeste ydelsesgruppe der med fordel kan beholdes. Forøgelsen i det økonomiske udbytte fremgår af tabel 6.2, medens resultaterne viste, at den indbyrdes prioritering kun i meget lille udstrækning påvirkes.

En tilsvarende indflydelse (dog i modsat retning) har en enkeltstående prisstigning på kælvekvier. En 20% stigning fører således til, at kun køer i laveste ydelsesgruppe med længst kælvningsinterval skal udskiftes. På trods af dette påvirkes den indbyrdes prioritering af køerne næsten ikke.

Prisen på kalve øver kun meget lille indflydelse på udskiftningspolitiken. Således skiftede kun en enkelt tilstand med langt kælvningsinterval til udskiftning. Tilsvarende var påvirkningen af den indbyrdes prioritering uden praktisk betydning.

I praksis er priserne på de forskellige kategorier af dyr dog stærkt korreleret. Således er enkeltstående prisudsving på 20% for blot én kategori utænkelig. Se i øvrigt kapitlet "Markedsforhold" i SH's betrn. 474,485,502 (herunder endvidere figur 6.1) og 515. Mere realistisk ville det derfor være, om prisen på alle dyr steg f.eks. 10%. En sådan ændring viste sig at være af meget lille betydning (jvf. afsnit 6.5.3) både for de optimale beslutninger og den indbyrdes prioritering, hvilket gør resultaterne mere stabile i praksis.

En 10% stigning i mælkeprisen fører til en lidt kraftigere udskiftning blandt de lavest ydende køer. Under ét er virkningen dog minimal,

hvilket også er tilfældet for den indbyrdes prioritering. Da mælken er hovedindtægtskilden har en sådan stigning dog stor betydning for det økonomiske udbytte.

Hvad angår foderet er moderate prisstigninger næsten virkningsløse både for de optimale beslutninger og den indbyrdes prioritering. Dette gælder uanset om alt foder stiger, eller der kun er tale om enten basisfoder eller produktionsfoder. Den økonomiske betydning er dog stor.

Sammenfattende må siges, at kun ændringer i bytteforholdet mellem kælvekvier og udsætterkører har virkelig betydning for de optimale beslutninger. Selv sådanne ændringer har dog kun meget lille betydning for den indbyrdes prioritering.

6.5.3 Rente

Selv markante udsving i renten, viste sig at være næsten betydningsløse både for de optimale beslutninger, den indbyrdes prioritering og det økonomiske udbytte. Dette forklares af, at kapitalinvesteringen ikke påvirkes af udskiftningen, idet værdien på kælvekvien modsvares af værdien af udsætterko og spædekalv. Dette er en stor fordel da kalkulationsrenten vil være vanskelig at fastlægge nøjagtigt i praksis.

DISKUSSION AF MODELLEN, DENS RESULTATER OG ANVENDELIGHED

Alle resultater i foregående kapitel har indbyrdes været logisk sammenhængende. Hvad angår den optimale udskiftningspolitik (tabel B.12) og dermed også de optimale beslutninger for de enkelte køer (tabel B.13), kommer denne logik f.eks. til udtryk ved, at hvis to køer kun adskiller sig fra hinanden med hensyn til ydelsesniveau, og den lavestydende skal beholdes, skal den højere ydende også altid beholdes. Tilsvarende betragtninger kan gøres vedrørende kælvningsintervallets længde.

Som vist i afsnit 6.3 gælder denne logik også for de indbyrdes størrelsesforhold af de økonomiske tab ved ikke at følge den optimale beslutning.

Også de ændringer i optimale beslutninger, der fremkommer ved følsomhedsanalyserne går alle i retninger, der er logisk rigtige.

En indvending mod modellen kunne være, at det ved optimeringen forudsættes, at de valgte priser og renter ligger fast i fremtiden. Hvad de faste priser angår, kan anføres at en almindelig inflatorisk udvikling, hvor alle priser stiger proportionalt, ikke har nogen betydning, idet renten da bare skal være realrenten renset for inflation i stedet for markedsrenten, hvorved der regnes i "nutidspriser" frem for løbende priser. Desuden er også vist i afsnit 6.5.2., at en proportional forøgelse af alle priser ikke øver indflydelse på resultaterne (beslutninger og prioritering).

Af følsomhedsanalyserne fremgår også, at de eneste prisændringer, der virkelig har betydning for de optimale beslutninger er ændring af prisforholdet mellem kælevkie og udsætterko. Imidlertid er disse priser stærkt korreleret, idet en højere pris på køer til slagting automatisk fører til en højere pris på kælevkier. Markante ændringer i prisforholdet vil derfor næppe eller sjældent forekomme, og selv om det skulle ske, vil den indbyrdes prioritering kun i ringe grad blive påvirket.

Disse overvejelser viser, at forudsætningen om faste priser ikke er nogen væsentlig svaghed ved modellen.

Fastlæggelse af kalkulationsrenten er relativt vanskelig, idet den afhænger af alternativ pengeanbringelse, marginal skatteprocent og inflationsraten. Der er således stor forskel på, om landmanden ikke har behov for driftskredit og samtidigt har en trækprocent på 70, eller om han må finansiere driften via dyre leverandørkreditter og ikke betaler skat. Imidlertid viser resultaterne fra afsnit 6.5.3., at renten har meget begrænset indflydelse på både de optimale beslutninger og på den indbyrdes prioritering.

Det er derfor ikke så afgørende, om renten ikke kan forudsiges, eller hvis den skulle ændre sig i fremtiden.

Genetisk fremgang i modellen tages der ikke direkte hensyn til, sådan at forstå at de aktuelle kælvkvier direkte ansættes til at yde mere end de ældre køer i besætningen gjorde i første laktation. Alligevel er dette forhold indirekte indbygget. De nye kviers ydelse antages nemlig at være normalfordelt om det alderskorrigerede besætningsgenemsnit korrigeres til 1. laktationsniveau - se (4.1). Dette besætningsgennemsnit beregnes på grundlag af nuværende og tidligere laktationsydelser fra de køer, der på det betragtede tidspunkt står i besætningen (afgæede køer medregnes ikke).

Gennemsnitsydelsen for de nye kvier vil derfor hele tiden svare til det aktuelle ydelsesniveau i besætningen. Herved tages ikke hensyn til at nye kvier ved genetisk fremgang er en anelse bedre end det aktuelle niveau i besætningen i øvrigt, men niveauet for nye kvier vil automatisk følge med, hvis ydelsen i det hele taget stiger over årene på grund af genetisk fremgang.

Såfremt ydelsen måltes absolut i stedet for relativt i forhold til besætningen, ville de nye kvier i al fremtid antages at ligge på det nuværende genetiske niveau, medens ældre køer i besætningen ville blive vurderet stadig højere jo flere år der forløber på grund af den genetiske fremgang. Herved ville kvierne blive undervurderet, og resultatet ville blive en udskiftningspolitik, efter hvilken kørerne blev beholdt for længe. Dette problem er imidlertid undgået ved at regne med relative ydelser.

Hvad angår valget af tilstandsvariable gælder, at EDB-sprogets kapacitet har begrænset mulighederne. Ud over de 4 valgte 1) laktationsnummer, 2) tidspunkt i laktationen, 3) ydelsesniveau og 4) kælvnings-

intervallets længde ville yderligere en variabel for kropsvægt og en anden for almen sundhedstilstand være relevante. Ved at begrænse modellen til de 4 omtalte (jvf. kapitel 4) opnås dog den meget væsentlige fordel, at der kun kræves registreringer, der allerede foretages i enhver ydelseskontrolleret besætning. Løbende ajourføring af seneste løbe-/insemineringsdato og drægtighedsdato i kontrolforeningsdatasættet er af største betydning for at få pålidelige resultater fra modellen.

Skulle således kropsvægten inddrages, ville det kræve ekstra registrering og dermed evt. afholde en del landmænd fra at bruge modellen. Endvidere er brystmål også forbundet med en ikke ubetydelig usikkerhed, og en vejning vil i almindelighed være udelukket.

Hvad angår sundhedstilstanden findes der ikke på nuværende tidspunkt et objektivt mål, der kan anvendes som tilstandsvariabel, og det ville uden tvivl også være vanskeligt at sammenkæde en sådan variabel med konkrete forventninger om ydelse og slagteværdi.

I mangel af en sådan variabel må EDB-udskrifterne med optimale beslutninger og indbyrdes prioritering derfor stadig vurderes subjektivt. De økonomiske tab ved at fravige en optimal beslutning må således afvejes mod subjektiv viden om den enkelte ko's aktuelle og forventede sundhedstilstand m.v. Der er dog ingen tvivl om, at modellens resultater vil være til stor nytte ved disse vurderinger.

Den store stabilitet, som prioriteringslisten har vist overfor ændrede forudsætninger, gør, at dens oplysninger må betragtes som de væsentligste, som optimeringen resulterer i. Denne liste er i modsætning til de optimale beslutninger uafhængig af, om der udskiftes med en kælvekvie eller besætningsstørrelsen i stedet justeres, fordi en udskiftningsssituation kan opfattes som en konkurrence mellem de tilstede værende køer og kælvekvier om det aktuelle antal staloplads. Prioriteringslisten viser, hvordan den enkelte ko har klaret sig i denne konkurrence udtrykt ved dens overlegenhed (regnet med fortegn) i forhold til en kælvekvie.(se sjølen "gevinst" i tabel B.14), som i konkurrencen pr. definition sættes til værdien nul.

Skal der ikke sættes kvier ind, fordi ingen haves, eller fordi besætningen ønskes reduceret, skal målestokken ikke være en kælvekvie, men derimod den dårligste ko, der under de givne forhold er plads til. I

en sådan situation burde derfor i tabel B.14 gevinsten ved at beholde hver enkelt ko justeres med forskellen i gevinst mellem en kælvekvie og den dårligste ko, der er plads til. Men da denne justering skulle foretages for alle køer, ville den indbyrdes prioritering ikke ændre sig.

I mange besætninger vil udsætningstidspunktet også være bestemt af, hvornår egne kvier kælver. Udvælgelsen af de køer, der skal udsættes, når der sættes kvier ind (også evt. indkøbte), foretages efter prioriteringslisten - dog med særlig hensyntagen til sundhedstilstanden hos højere prioriterede køer.

Som modellen er programmeret er den meget fleksibel. Såfremt det på grundlag af ny viden bliver nødvendigt at justere visse parametre, kan det uden videre gøres, uden at det i øvrigt griber ind i programmet. Endvidere specificeres rente og priser individuelt for den enkelte besætning, og det aktuelle besætningsgennemsnit inddrages automatisk som udgangspunkt for optimeringen. Der er således tale om individuelle løsninger nøje tilpasset den enkelte besætning.

Det er dog en svaghed, at overlevelsessandsynlighederne har måttet skønnes, men skøn over de 3 niveauer høj, middel og lav sundhed fører dog til realistiske udskiftningsprocenter, således 38, 45 og 54%. Da disse sandsynligheder har vist sig at være af væsentlig betydning, bør de senere estimeres på et empirisk datamateriale.

I den nærmeste fremtid vil modellen blive anvendt på gårde under Hørsforsøg med kvæg. Såfremt de indvundne erfaringer tilskynder hertil, kunne systemet tages i anvendelse af Landsudvalget for kvæg via Landbrugets EDB Center og tilbydes som en generel service herfra.

Før modellen anvendes i praksis vil der dog blive indføjet en særlig rutine vedrørende køer, der 12 uger efter kælvning befinner sig i laveste ydelsesgruppe. En sådan situation kan volde problemer såfremt modellen finder frem til, at sådanne køer skal beholdes. Den laveste ydelsesgruppe er nemlig ikke nedadtil begrænset, hvilket betyder, at selv ekstremt lavt ydende køer henføres til dette niveau. Det er dog klart, at der altid må være en nedre grænse for ydelsen, sådan at hvis den ligger under dette niveau, skal koen udskiftes selv om modellens optimale beslutning for det laveste ydelsesniveau er "behold".

Som kriterium anvendes her, at hvis koen på grundlag af de første 12 uger har negativ hældning på laktationskurven d.v.s. aftagende ydelse og en gennemsnitsydelse for 1. kalvskør under 14,0 kg 4% mælk eller for 2., 3. og 4. kalvs køer under henholdsvis 15,0, 16,0 og 17,0 kg 4% mælk, skal der udskiftes. Dette vil i udskriften tabel B.13 blive markeret med beslutningen "udskift straks", men da denne beslutning træffes uden om den egentlige model, kan tabene ved ikke at følge den ikke beregnes. I prioriteringslisten (tabel B.14) vil sådanne køer derfor stå øverst i lighed med køer, hvis kælvningsinterval overstiger 17 måneder. Det skal dog understreges, at en lav og aftagende ydelse forårsaget af eksempelvis en forbigående sygdom i perioden 1-12 uger efter kælvning kan betinge, at koen alligevel bør beholdes. Er den forventede produktion således væsentlig højere beholdes koen. Er der først senere en egen kælvekvie til at erstatte den betragtede ko, kan der også ved lav ydelse - eller endog for goldko - opnås en positiv aflønning til stald og arbejde. Dette gælder især, når der er høj tilvækstværdi og/eller billigt foder til rådighed (jvf. tabel B.15 - B.17 i appendiks B).

LITTERATUR

- Auran, T. 1974. Studies on Monthly and Cumulative Monthly Milk Yield Records II. The Effect of Calving Interval and Stage in Pregnancy. *Acta Agric. Scand.* 24, 339-347.
- Bellman, R. 1957. Dynamic Programming. Princeton, New Jersey.
- Giaever, H.B. 1966. Optimal Dairy Cow Replacement Policies. University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan.
- Hadley, G. 1964. Nonlinear and Dynamic Programming. Reading, Massachusetts.
- Hindhede, J. 1982. Malkekøgets produktion og økonomi 1981/82. 532. Beretning fra Statens Husdyrbrugsforsøg, pp 40-70.
- Hjortshøj Nielsen, A. og Stryg, P.E. 1976. Landbrugets Operationsøkonomi. (Del I og II, 2. reviderede udgave, DSR-forlag). København.
- Howard, R.A. 1960. Dynamic Programming and Markov Processes. Cambridge, Massachusetts.
- Jensen, A. 1972. A manual of LIMP. København.
- Kristensen, A. 1982. En model for udskiftning af malkekøer. Hovedopgave ved Institut for Matematik og Statistik, Den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole. København.
- Morrison, D.A. 1976. Multivariate Statistical Methods. Second edition. New York.
- Preinrich, G. 1940. The Economic Life of Industrial Equipment. *Econometrica* 8, 12-44.
- Rapp, B. 1974. Models for Optimal Investment and Maintenance Decisions. Stockholm.
- Rasmussen, S. 1976. Udkiftningskalkulens teori og anvendelse. Landbrugøkonomiske Studier, nr. 6. Økonomisk Institut, Den Kgl. Veterinær- og Landbohøjskole. København.
- Reenberg, H. 1979. Udkiftning af malkekøer. En stokastisk udkiftningsmodel. Memorandum 6, Jordbrugøkonomisk Institut. København.
- Smith, B.J. 1971. The Dairy Cow Replacement Problem. - An Application of Dynamic Programming. Bulletin 745. Florida Agricultural Experiment Stations. Gainesville, Florida.

APPENDICES

A

THE MATHEMATICAL AND STATISTICAL FRAMEWORK OF THE REPLACEMENT MODEL

Det matematiske og statistiske grundlag
for udskiftningsmodellen

A.1

OPTIMIZATION BY USE OF MARKOV CHAINS

Optimering ved hjælp af Markovkæder

A.1.1 Fundamental concepts

In the Markov chains handled in this study, time is represented by a sequence of observation periods, where each link in the sequence is called a stage. In most models all stages are assumed to be of equal lenght (e.g. a week, a month, or a year), but in this study the lenghts of the stages are allowed a certain variation among specified values.

In each stage the system will be in a specific state, defined by a number of discrete state variables which contain all relevant information about the system. In the present case, the number of states will be finite. It is assumed that the state is known on the first day of each stage. The system will stay in that state during the whole stage and then move to another state (or remain in the same state).

It is a characteristic feature of Markov chains that the probability distribution of the possible states at the following stage depends only on the actual state at the present stage. This means that if y_n is the vector of state variables in stage number n, then the conditional distribution of y_n is the same whether $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ are given or just y_{n-1} is given. That is, knowledge of the values of y at stages earlier than n-1, adds no further information about the value of y in stage n.

At the first day of each stage you must make a decision regarding the system. Suppose that the states are given numbers from 1 to I

(where I is a number greater than 1). Suppose further that the system at the present stage is in state i. Then you want to make the decision that maximizes your expected income during the planning horizon. Because this income is spread over time, all net economic returns must be discounted to present time, and the sum of these discounted net returns is called the present value - in symbols $f_i^k(n)$ where i is the state, n is the stage number, and k is the decision made. The optimization problem can be formulated in the following way:

$$\text{for each } i \text{ and } n: \text{determine } \max_k f_i^k(n) \quad (\text{A.1})$$

If the system is in state i there will be given probabilities that it has been transferred to state j at the next stage, if the decision k was made. These probabilities depending on i, j and the decision k are denoted p_{ij}^k . Because p_{ij}^k is a probability the following inequality is valid:

$$0 \leq p_{ij}^k \leq 1 \quad (\text{all } i, j \text{ and } k) \quad (\text{A.2})$$

Further the system has to be in one and only one state at the next stage so:

$$\sum_j p_{ij}^k = 1 \quad (\text{all } i \text{ and } k) \quad (\text{A.3})$$

In each state i there will be an expected net return depending on the decision k. This is denoted r_i^k and is assumed to be collected on the first day of the stage. If, however, the incomes and outlays are distributed over the whole stage these must be discounted to the first day of the stage.

The discount factor from the first day of a stage to the first day of the proceeding stage is denoted b_i^k . This factor only depends on the interest rate r^* and the stage length $t=t(i,k)$, and it is defined by:

$$b_i^k = e^{-r^* t} \quad (\text{A.4})$$

(In the model the stage lenght is defined by the state and the decision made, and the interest rate is assumed given). It follows from

(A.4) that:

$$0 \leq b_i^k \leq 1 \quad (\text{all } i \text{ and } k) \quad (\text{A.5})$$

A policy is defined as a set of integers $s = (k_1, k_2, \dots, k_I)$, which specifies a decision k for each state i (where $i = 1, \dots, I$). Wherever k appears as a superscript in this paper, it denotes the decision made in the state i . As a consequence of this, the meaning of the expression p_{ij}^k is really $p_{ij}^{k_i}$, because k is the decision made in state i . However, the latter form is rather impractical, and that is the reason that the more simple form is chosen. Similarly the meaning of p_{ij}^s is $p_{ij}^{k_i}$, if k_i is the i 'th element of s .

A.1.2 Value Iteration

Suppose you know that after a certain stage in the chain, you are going to stop milk production and sell all your dairy cows. The last stage, where the cows are sold, is called stage number 0, and the preceding stages are given numbers backwards, so that stage number n means that there are still n stages left in the chain, before the production is stopped.

At stage 0 the present value $f_{i(0)}$ of the chain will be the salvage value of a cow in state i . At the beginning of stage 1 you will have to make one of the possible decisions. At once you will collect the economic return r_i^k associated with the state and the decision made. Another contribution comes from present value at stage 0 discounted to the first day of stage 1. But present value at stage 0 depends on the state of the system which you do not know. Only a probability distribution of the possible states is known. It is, however, sufficient to calculate the expected present value corresponding to the decision k at stage 0:

$$\sum_j p_{ij}^k f_{j(0)} \quad (\text{A.6})$$

The expected present value at stage 1 is thus:

$$f_{i(1)}^k = r_i^k + b_i^k \sum_j p_{ij}^k f_{j(0)} \quad (\text{A.7})$$

Assuming we want to maximize present value we define:

$$f_i(1) = \max_k f_i^k(1) \quad (A.8)$$

The set of k 's, which maximizes the right hand sides of the equations (A.8), defines an optimal policy at stage 1. Present values and an optimal policy at stage 2 are deduced in the same way:

$$f_i(2) = \max_j (r_i^k + b_i^k \sum_j p_{ij}^k f_j(1)) \quad (A.9)$$

where $f_j(1)$ ($j = 1, \dots, I$) is known from (A.7) and (A.8). The formula (A.9) is easily generalized to:

$$f_i(n) = \max_k (r_i^k + b_i^k \sum_j p_{ij}^k f_j(n-1)) \quad (A.10)$$

(A.10) provides at every stage an algorithm to compute an optimal policy. If you know the length of the planning horizon, defined as a certain number of stages left (N), you simply use the recursive relations formulated as (A.10) for $n = 1, 2, \dots, N$ to get an optimal policy at stage N .

Since the stage length is allowed to vary it is unreasonable to plan under a horizon given by a fixed number of stages. As a consequence of this, the model will only be optimized under infinite planning horizon in this paper.

Nevertheless (A.10) provides an algorithm under infinite planning horizon too. When n is small the optimal policy may vary from stage to stage. It can, however, be shown (Kristensen 1982) that the present value in each state i will converge to a constant g_i as n becomes large, i.e.:

$$f_i(n) \rightarrow g_i \text{ for } n \rightarrow \infty \quad (A.11)$$

Further it can be shown that fixing a rule of how to choose between several optimal decisions the optimal policy will not vary from stage to stage for sufficiently large n (Kristensen 1982). In symbols this means ($s_{(n)}$ being the optimal policy at stage n) that:

$$s_{(n)} \rightarrow s \text{ for } n \rightarrow \infty \quad (A.12)$$

Summing up the value-iteration defined by (A.10) has got the following steps:

- (1) Define $f_i(0)$ as the salvage value of a dairy cow in state i.
- (2) Use the recursive formula

$$f_i(n) = \max_k (r_i^k + b_i^k \sum_j p_{ij}^k f_j(n-1))$$

for $n = 1, 2, 3, \dots$ etc. to find the optimal policy $s_{(n)}$ at each stage.

- (3) When you "feel sure" that the optimal policy will not change further you stop the iteration, and the policy found will be regarded as optimal under infinite planning horizon.

Because of (3) this is not really an algorithm. It was used by Giaever (1966) who found it satisfactory. Kristensen (1982) used it too, and compared it to other algorithms. He concluded that it was useable but far less efficient than the policy-iteration, which will be described below.

A.1.3 Policy-iteration

Suppose that a single policy is chosen, and that you follow that policy at all stages. The present value at stage n in state i is determined in the same recursive way as (A.10), except that you do not choose an optimal policy at each stage; i.e. the present value $f_i^s(n)$ associated with the chosen policy is defined by:

$$f_i^s(n) = r_i^s + b_i^s \sum_j p_{ij}^s f_j^s(n-1) \quad (\text{A.13})$$

Define the vectors $\underline{f}^s(n) = (f_1^s(n) \ f_2^s(n) \ \dots \ f_I^s(n))'$ and $\underline{r}^s = (r_1^s \ r_2^s \ \dots \ r_I^s)'$. Denote by \underline{P}^s the matrix $\{p_{ij}^s\}$ and let \underline{B}^s be a diagonal matrix whose non-zero element in the i'th row is b_i^s . Equation (A.13) is valid for all i, and it can be written in matrix notation as:

$$\underline{f}^s(n) = \underline{r}^s + \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s \cdot \underline{f}^s(n-1) \quad (\text{A.14})$$

Using this formula recursively we get:

$$\underline{f}^s(n) = (\underline{E} + \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s + (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^2 + \dots + (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^{n-1}) \cdot \underline{r}^s + (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^n \cdot \underline{f}^s(0) \quad (A.15)$$

where \underline{E} is the $I \times I$ identity matrix. (A.15) can be written shorter as:

$$\underline{f}^s(n) = \left(\sum_{a=0}^{n-1} (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^a \right) \cdot \underline{r}^s + (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^n \cdot \underline{f}^s(0) \quad (A.16)$$

Kristensen (1982) showed that if:

- a) - the elements of \underline{P} satisfy (A.2) and (A.3)
 - b) - the elements of \underline{B} satisfy (A.5)
 - c) - at least one state j satisfies the following two restrictions:
(1) $b_j^s < 1$ and (2) for all i : $p_{ij}^s > 0$
- then:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^n = \underline{0} \quad (A.17)$$

where $\underline{0}$ is a $I \times I$ matrix, whose elements are all zero.

In our setup the conditions a), b), and c) are satisfied. Thus we can assume (A.17) to be valid. Combining the information from (A.16) and (A.17) we get:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}^s(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{a=0}^{n-1} (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^a \right) \cdot \underline{r}^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{C}_n \cdot \underline{r}^s \quad (A.18)$$

where the matrix \underline{C}_n is defined as:

$$\underline{C}_n = \sum_{a=0}^{n-1} (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^a \quad (A.19)$$

Multiplying both sides of (A.19) with $(\underline{E} - \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)$ we get:

$$\begin{aligned} \underline{C}_n (\underline{E} - \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s) &= \sum_{a=0}^{n-1} ((\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^a \cdot \underline{E} - (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^a \cdot (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)) \\ &= \sum_{a=0}^{n-1} ((\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^a - (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^{a+1}) \\ &= (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^0 - (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^n = \underline{E} - (\underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^n \end{aligned} \quad (A.20)$$

From (A.17) and (A.20) we get:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{C}_n \cdot (\underline{E} - \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)) = \underline{E} \quad (A.21)$$

which means that:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{C}_n = (\underline{E} - \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^{-1} \quad (A.22)$$

Summing up (A.18) takes the form:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f}^s(n) = (\underline{E} - \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^{-1} \cdot \underline{r}^s \quad (A.23)$$

The equation (A.23) is derived using a fixed policy. Since every policy s defines matrices \underline{B}^s and \underline{P}^s and a vector \underline{r}^s , (A.23) defines for every policy a vector of present values under infinite planning horizon. Analogous to (A.11), (A.23) can also be written:

$$\underline{g}^s = (\underline{E} - \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^{-1} \cdot \underline{r}^s \quad (A.24)$$

where \underline{g}^s is the vector of present values defined by the policy under infinite planning horizon.

The object is now to select the policy that maximizes each element in \underline{g}^s . Because the number of policies is finite, it would theoretically be possible to calculate \underline{g}^s for them all and then select the one, which is optimal. However, in the model which will be formulated here, there are 177 states and 4 decisions. This means 4^{177} or approximately $1.6 \cdot 10^{106}$ possible policies which is prohibitive.

We are now ready to describe the algorithm called "policy-iteration":

(1) Choose an arbitrary policy s .

(2) Calculate the vector of present values associated with s :

$$\underline{g}^s = (\underline{E} - \underline{B}^s \cdot \underline{P}^s)^{-1} \cdot \underline{r}^s$$

(3) Find, by means of the present values calculated in (2), in each state the decision k that maximizes:

$$r_i^k + b_i^k \sum_j p_{ij}^k g_j^s \quad (A.25)$$

(If two or more k 's yield the same value of the expression a fix-

ed rule of how to choose is needed). In this way a new policy s^1 is defined. If $s^1 = s$ then an optimal policy is found. Otherwise redefine s according to the new policy (i.e. put $s = s^1$), and repeat step (2) and (3).

It can be shown, that this algorithm always will provide an optimal policy in a finite number of steps. The proof is actually quite simple, and the rest of this section is devoted to this proof:

Suppose that s^1 is a policy. Let s^2 be the policy deduced by means of s^1 according to step (3) in the cycle. This means that:

$$r_i^{s^2} + b_i^{s^2} \sum_j p_{ij}^{s^2} g_j^{s^1} \geq r_i^{s^1} + b_i^{s^1} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^1} g_j^{s^1} \quad (\text{all } i) \quad (\text{A.26})$$

Further we get from (A.24):

$$g_i^{s^1} = r_i^{s^1} + b_i^{s^1} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^1} g_j^{s^1} \quad (\text{A.27})$$

$$g_i^{s^2} = r_i^{s^2} + b_i^{s^2} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^2} g_j^{s^2} \quad (\text{A.28})$$

Let d_i denote the improvement in the expression (A.25), which s^2 brings along compared to s^1 :

$$d_i = r_i^{s^2} + b_i^{s^2} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^2} g_j^{s^1} - r_i^{s^1} - b_i^{s^1} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^1} g_j^{s^1} \quad (\text{A.29})$$

From (A.26) we get:

$$d_i \geq 0 \quad (\text{all } i) \quad (\text{A.30})$$

If (A.27) is multiplied with -1, and then added to (A.28) we get:

$$\begin{aligned} \Delta g_i &= g_i^{s^2} - g_i^{s^1} = r_i^{s^2} + b_i^{s^2} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^2} g_j^{s^2} - r_i^{s^1} - b_i^{s^1} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^1} g_j^{s^1} \\ &= r_i^{s^2} + b_i^{s^2} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^2} g_j^{s^1} - r_i^{s^1} - b_i^{s^1} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^1} g_j^{s^1} + b_i^{s^2} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^2} g_j^{s^2} - \\ &\quad b_i^{s^1} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^1} g_j^{s^1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= d_i + b_i^{s^2} \cdot \sum_j (p_{ij}^{s^2} g_j^{s^2} - p_{ij}^{s^2} g_j^{s^1}) \\
 &= d_i + b_i^{s^2} \cdot \sum_j p_{ij}^{s^2} \Delta g_j
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

In matrix notation (A.31) is written:

$$\Delta \underline{g} = \underline{d} + \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2} \cdot \Delta \underline{g}$$

or

$$\underline{d} = \Delta \underline{g} - \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2} \cdot \Delta \underline{g} = (\underline{E} - \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2}) \cdot \Delta \underline{g}$$

or

$$\Delta \underline{g} = (\underline{E} - \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2})^{-1} \cdot \underline{d} \tag{A.32}$$

From (A.19) and (A.22) we get:

$$(\underline{E} - \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2})^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a=0}^n (\underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2})^a \tag{A.33}$$

(A.2) and (A.5) tell that all the elements of \underline{B}^{s^2} and \underline{P}^{s^2} (are non-negative, and thus every power of the matrix product will have the same property. From this we conclude that the matrix on the left hand side of (A.33) has only non-negative elements. Combining this fact with (A.30) we conclude from (A.32) that each element in $\Delta \underline{g}$ is non-negative. Formulating (A.33) as:

$$(\underline{E} - \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2})^{-1} = \underline{E} + \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2} + (\underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2})^2 + \dots \tag{A.34}$$

we observe that the diagonal elements of the matrix $(\underline{E} - \underline{B}^{s^2} \cdot \underline{P}^{s^2})^{-1}$ are at least 1. Combining this with (A.32) we find that if just one d_i is strictly positive, then at least one Δg_i will be strictly positive too. So if s^2 is not equal to s^1 , then s^2 will increase the present value in at least one state, and further it cannot decrease present value in any state.

Now assume that $s^2 = s^1$. Then the present values will be the largest possible in every state, and the associated policy will be optimal under infinite planning horizon. This can be seen as follows:

Suppose that there is a policy s^3 , such that for some i :

$$g_i^{s^3} > g_i^{s^1} \quad (A.35)$$

Now define d as in (A.29) but with s^3 instead of s^2 . Clearly all elements of d must be negative or zero, because otherwise s^2 would not have been chosen equal to s^1 . (A.32) then shows that Δg_i is negative or zero in all states, which means that $g_i^{s_1} \geq g_i^{s_3}$ for all i . But this contradicts the assumption (A.35), which then must be false. The conclusion is, that if the cycle has stopped, then the resulting policy maximizes present value in every state.

That the cycle indeed will stop follows from the fact that an iteration never leads to smaller present value in any state. And since the number of possible policies is limited, the cycle will always reach an optimal policy in a finite number of iterations. (Practical experience shows that very few iterations are needed - Kristensen 1982).

A.1.4 Linear programming

The model can also be optimized by means of linear programming. However Kristensen (1982) concluded that this method (though it could be used) was inefficient and expensive (due to computer time) compared to the policy-iteration, which will be used here. The linear programming method will not be discussed further (a description is given by Kristensen (1982) and by Hadley (1964)).

A.1.5 Economic loss if the optimal policy is not followed

If the policy s^1 is optimal, but for some reason you want to follow the policy s^2 which is not optimal, then the vector of present values can be calculated for both policies by means of (A.24), and the economic loss will be given by the difference $g^{s^1} - g^{s^2}$, where the elements of the resulting vector are the economic losses in the specific states.

It is a little more complicated if you just want to deviate from the optimal decision at a single stage (i.e. make a non-optimal decision once). Suppose that in the future (from the next stage) you are going to follow the optimal policy s , but at the present stage you want

to make a non-optimal decision. Suppose further, that the system is in state i . At the next stage the vector of present values will be \underline{g}^s (according to (A.24)). If an optimal decision was made in state i at the current stage present value would be \underline{g}_i^s (where \underline{g}_i^s is the i 'th element of \underline{g}^s). Instead the non-optimal decision k^l is made, and this decreases present value in the state to:

$$\underline{g}_i^l = r_i^{k^l} + b_i^{k^l} \cdot \sum_j p_{ij}^{k^l} \underline{g}_j^s \quad (\text{A.36})$$

The economic loss is then calculated as the difference $\underline{g}_i^s - \underline{g}_i^l$, or if this is combined with (A.36):

$$\text{Loss} = \underline{g}_i^s - r_i^{k^l} - b_i^{k^l} \cdot \sum_j p_{ij}^{k^l} \underline{g}_j^s \quad (\text{A.37})$$

This formula is very important, because it makes it possible to tell what the economic consequences will be if you - perhaps as a result of non-economic considerations - want to make a decision, which is not optimal from an economical point of view. As an example of this consider a farmer, who has got a cow, which the optimal policy tells him to keep. However, the cow is characterized by a very difficult temper. Then the farmer will be interested in knowing, how much money he will lose if he, despite the optimal policy, decides to replace this cow. The answer is given by (A.37).

A.2

THE STATE VARIABLE CONCERNING MILK YIELD Tilstandsvariablen for mælkeydelse

One of the most important state variables included in the model is the one concerning milk yield. Because of the Markov requirement it is not possible to use kg of 308 days FCM (fat-corrected milk) directly as a state variable. The reason is that if we look at different lactations of the same cow, then there is a clear connection between milk yield during present lactation and all previous lactations (not only the last preceding). In other words, if we are going to predict milk yield during the next lactation, we can make a better prediction, if we know the yields during all previous lactations than if we only know the milk yield during present lactation. In symbols this means that if y_n is the milk yield during the n'th lactation and we assume the y's to be normally distributed, then at least one of the following two restrictions is not satisfied:

$$E(y_{n+1}|y_n) = E(y_{n+1}|y_n, y_{n-1}, \dots, y_1) \quad 1) \quad (A.38)$$

$$\text{Var}(y_{n+1}|y_n) = \text{Var}(y_{n+1}|y_n, y_{n-1}, \dots, y_1) \quad 2) \quad (A.39)$$

Giaever (1966) showed that it is possible to define a variable concerning milk yield in such a way that the Markov requirement formulated as (A.38) and (A.39) is satisfied. First his results are deduced and explained. Then they are used as a basis of further extension.

A.2.1 The theory of the Giaever model of milk yield

Lactation yield is influenced by some causes of variation, which are already explained by other state variables, or they may be included in other ways in the replacement model. If milk yield is denoted y , the following regression model is assumed valid, where the specific cow is denoted a , and n is the lactation number:

1) Conditional means

2) Conditional variances

$$y_{an} = b_{n0} + b_{n1}x_{an}^1 + b_{n2}x_{an}^2 + u_{an} \quad (A.40)$$

The b 's are regression coefficients and the x 's are variables measured for the a 'th cow in the n 'th lactation (more than two effects may be included). Finally the residual (error term) is a measure of the production capacity of the cow after correcting for the effects of x^1 and x^2 . It is assumed to be normally distributed with the parameters:

$$E(u_{an}) = 0 \quad (A.41)$$

$$\text{Var}(u_{an}) = \sigma_n^2 = \sigma_{nn}^2 \quad (A.42)$$

Further it is assumed that the residuals for different cows are independent:

$$\text{Cov}(u_{an}, u_{bn})^1) = 0 \quad \text{if } a \neq b \quad (A.43)$$

It is also assumed that u_{an} is independent of x_{am}^1 and x_{am}^2 (even if $m \neq n$). On the other hand residuals for different lactations of the same cow may be correlated:

$$\text{Cov}(u_{an}, u_{am}) \neq 0 \quad (A.44)$$

Define vectors $\underline{y}_a = (y_{a1} \ y_{a2} \ \dots \ y_{a5})'$ and $\underline{u}_a = (u_{a1} \ u_{a2} \ \dots \ u_{a5})'$. Then the model (A.40) can be written in vector notation concerning lactation 1 to 5:

$$\begin{bmatrix} y_{a1} \\ y_{a2} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{a5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} + b_{11}x_{a1} + b_{12}x_{a1}^2 \\ b_{20} + b_{21}x_{a2} + b_{22}x_{a2}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{50} + b_{51}x_{a5}^1 + b_{52}x_{a5}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{a5} \end{bmatrix} \quad (A.45)$$

¹⁾ The covariance.

The elements of the residual vector are used as measures of milk yield in the single lactations, because they express deviation from mean yield, when the explanatory variables are given.

The vector as a whole is assumed to be multivariate normally distributed with the mean vector:

$$E(\underline{u}_a) = \underline{0} \quad (A.46)$$

and the covariance matrix $\text{Cov}(\underline{u}_a)$:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \dots & \sigma'_{15} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \dots & \sigma'_{25} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma'_{51} & \sigma'_{52} & \dots & \sigma'_{55} \end{bmatrix} \quad (A.47)$$

- where σ'_{nm} is the covariance between u_{an} and u_{am} . Similarly σ'_{nn} is the variance (not the standard deviation) of u_{an} .

However, u_{an} cannot be used directly as state variable, because it does not satisfy the Markov requirement (A.38) and (A.39). Nevertheless Giaever (1966) showed that it is possible to define linear combinations of all observed values of u_{an} up to and including present lactation in such a way that the Markov requirement is satisfied with respect to the linear combinations. In symbols the new variables, which can be used as state variables, are defined as (in the following all variables are referring to the same cow so the index a is skipped):

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 \\ v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \\ v_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 \\ v_4 &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + a_{43}u_3 + a_{44}u_4 \\ \text{etc.} & \end{aligned} \quad (A.48)$$

In this way we are able to express information about present and

all previous lactations in a single variable, and that is why it is possible to satisfy the Markov requirement.

(A.48) is a linear transformation of the multivariate random vector \underline{u} . If the resulting random vector is denoted \underline{v} (which has got the elements $v_1, v_2 \dots$ etc.), its distribution will be multivariate normal too, and the parameters will be (Morrison, 1976):

$$E(\underline{v}) = \underline{A} \cdot E(\underline{u}) = \underline{A} \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad (\text{A.49})$$

$$\text{Cov}(\underline{v}) = \underline{C}_{\underline{v}} = \underline{A} \cdot \underline{C} \cdot \underline{A}' \quad (\text{A.50})$$

- where the elements of the matrix \underline{A} are the coefficients of the linear transformation.

Then the object is to select the a 's in (A.48) in such a way that the Markov requirement is satisfied. According to Giaever (1966) it is sufficient to select the coefficients in such a way that:

$$E(v_{n+1}|v_n, v_{n-1}, \dots, v_1) = b \cdot v_n + 0 \cdot v_{n-1} + \dots + 0 \cdot v_1 \quad (\text{A.51})$$

In other words the coefficients in the linear combination must be selected in such a way that the multiple regression coefficients of v_{n+1} on v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 are zero except that of v_{n+1} on v_n .

In general, if (X_1, \dots, X_n) is a multivariate normally distributed random vector with mean vector $\underline{0}$ and covariance matrix \underline{C}_n , then the regression coefficients $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1})$ of X_n on X_1, \dots, X_{n-1} are (Morrison, 1976):

$$(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1}) = (\sigma_{n1} \ \sigma_{n2} \ \dots \ \sigma_{n,n-1}) \cdot \underline{C}_{n-1}^{-1} \quad (\text{A.52})$$

where the vector $(\sigma_{n1} \ \sigma_{n2} \ \dots \ \sigma_{n,n-1})$ is the last row of \underline{C}_n (excluding the last element) and \underline{C}_{n-1} is the matrix \underline{C}_n excluding the last row and the last column.

However, the restriction (A.51) establishes no definitive way of selecting the a 's, because many sets of coefficients (a 's) will make the state variable v satisfy (A.51). Another restriction is thus needed, and then we, subject to the restriction (A.51), want to minimize the conditional variance of u_{n+2} given v_{n+1} , in order to be able to give as good a prediction as possible of milk yield in the future.

To ensure continuity the arguments of Giaever (1966) deducing the a 's in (A.48) will be reproduced (covariance elements concerning u are denoted σ_{nm} , and those concerning v are denoted σ_{nm}^*):

The choice of a_{11} is arbitrary, however, for convenience a_{11} will be set equal to the regression coefficient in the regression of u_2 on u_1 . That is (according to (A.52)):

$$a_{11} = \sigma_{21}^{-1} \cdot \sigma_{11}^{-1} \quad (A.53)$$

Correspondingly a_{21} and a_{22} will be set equal to the regression coefficients in the multiple regression of u_3 on u_2 and u_1 :

$$(a_{21} \ a_{22}) = (\sigma_{31}^{-1} \ \sigma_{32}^{-1}) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} & \sigma_{12}^{-1} \\ \sigma_{21}^{-1} & \sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (A.54)$$

To make v_3 satisfy (A.51) we must require (according to (A.52)):

$$(\sigma_{31}^{-1} \ \sigma_{32}^{-1}) \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} & \sigma_{12}^{-1} \\ \sigma_{21}^{-1} & \sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = (0 \ b) \quad (A.55)$$

- where no restrictions are imposed on b . The 2×2 matrix (in the following denoted $H^{(2)}$) is known from (A.50):

$$\underline{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} & \sigma_{12}^{-1} \\ \sigma_{21}^{-1} & \sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} & \sigma_{12}^{-1} \\ \sigma_{21}^{-1} & \sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad (A.56)$$

The coefficients a_{11} , a_{21} and a_{22} are known from (A.53) and (A.54). By inverting the matrix $H^{(2)}$ and denoting the elements in the inverse matrix \underline{h}_{nm}^{-1} , the restriction (A.55) can be written as:

$$(\sigma_{31}^{-1} \ \sigma_{32}^{-1}) \cdot \begin{bmatrix} \underline{h}_{11}^{-1} \\ \underline{h}_{21}^{-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (A.57)$$

(- because no restrictions were imposed on b in (A.55)). The

covariance terms σ_{31} and σ_{32} are not known, but are functions of the unknown coefficients a_{31} , a_{32} and a_{33} :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad (A.58)$$

From this we get:

$$(\sigma_{31} \ \sigma_{32}) = (a_{31} \ a_{32} \ a_{33}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A.59)$$

Substituting (A.59) into (A.57) we get:

$$(a_{31} \ a_{32} \ a_{33}) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 1 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (A.60)$$

The last three matrices in the expression above are known. By carrying out the multiplication and denoting the resulting vector $(d_{11}^3 \ d_{21}^3 \ d_{31}^3)$, we can write the restriction as:

$$(a_{31} \ a_{32} \ a_{33}) \cdot (d_{11}^3 \ d_{21}^3 \ d_{31}^3)' = 0 \quad (A.61)$$

There are three variables to be determined while only one restriction is imposed. Then we want to select a solution to (A.61) in such a way that the conditional variance $\text{Var}(u_4 | v_3)$ is minimized.

(A.61) is easily transformed so that one of the variables is expressed as a function of the two others:

$$a_{31} = (a_{32} \ a_{33}) \cdot \begin{bmatrix} e_{11}^3 \\ e_{21}^3 \end{bmatrix} \quad (A.62)$$

- where the values of e_{11}^3 and e_{21}^3 are found from (A.61) by solving for a_{31} .

Following the same pattern it can generally be shown that if $n \geq 3$, then $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-2}$ can be written as a function of the last two coefficients $a_{n,n-1}$ and a_{nn} :

$$(a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{n,n-2}) = (a_{n,n-1} \ a_{nn}) \cdot \begin{bmatrix} e_{11}^n & \dots & e_{1,n-2}^n \\ e_{21}^n & \dots & e_{2,n-2}^n \end{bmatrix} \quad (A.63)$$

Generally speaking we want to select $a_{n,n-1}$ and a_{nn} in such a way that $\text{Var}(u_{n+1}|v_n)$ is minimized. Then (A.63) is used to calculate $a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-2}$.

u_{n+1} and v_n are both normally distributed with the mean zero. This means that:

$$E(u_{n+1}|v_n) = fv_n \quad (A.64)$$

- where f is the regression coefficient. Combining (A.64) with the information from (A.48) we get:

$$E(u_{n+1}|v_n) = f(a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots + a_{nn}u_n) \quad (A.65)$$

And if $m \leq n-2$ we get from (A.63):

$$a_{nm} = e_{1m}^n a_{n,n-1} + e_{2m}^n a_{nn} \quad (A.66)$$

Substituting this into (A.65) we get:

$$E(u_{n+1}|v_n) = fa_{n,n-1} \left(\sum_{m=1}^{n-2} e_{1m}^n u_m \right) + u_{n-1} + fa_{nn} \left(\sum_{m=1}^{n-2} e_{2m}^n u_m \right) + u_n \quad (A.67)$$

The terms inside the parentheses are linear combination of u_1, \dots, u_n , and we may define two new variables:

$$w_1^n = \left(\sum_{m=1}^{n-2} e_{1m}^n u_m \right) + u_{n-1} \quad (\text{A.68})$$

$$w_2^n = \left(\sum_{m=1}^{n-2} e_{2m}^n u_m \right) + u_n \quad (\text{A.69})$$

Substituting this into (A.67) gives:

$$E(u_{n+1}|v_n) = f a_{n,n-1} w_1^n + f a_{nn} w_2^n \quad (\text{A.70})$$

We want to select f , $a_{n,n-1}$ and a_{nn} so that $\text{Var}(u_{n+1}|v_n)$ is minimized. This is equivalent to seeking the regression coefficients in a regression of u_{n+1} on w_1^n and w_2^n . We will minimize the variance if $a_{n,n-1}$ is set equal to the regression coefficient for w_1^n , and a_{nn} is set equal to the regression coefficient for w_2^n . We can select any arbitrary value for f , and it is most convenient to set:

$$f=1 \quad (\text{A.71})$$

$a_{n,n-1}$ and a_{nn} are then set equal to the regression coefficients. In order to arrive at these regression coefficients, we must derive the covariance matrix for the random vector:

$$\underline{w}^n = (w_1^n \ w_2^n \ u_{n+1})' \quad (\text{A.72})$$

This is done by defining the transformation matrix:

$$\underline{M}^n = \begin{bmatrix} e_{11}^n & e_{12}^n & \dots & e_{1,n-2}^n & 1 & 0 & 0 \\ e_{21}^n & e_{22}^n & \dots & e_{2,n-2}^n & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

Then we find:

$$\underline{w}^n = \underline{M}^n \cdot \underline{u}^{n+1} \quad (\text{A.74})$$

- where \underline{u}^{n+1} is the vector $(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{n+1})'$. Similar to (A.50), the covariance matrix for \underline{w}^n is:

$$\underline{M}^n \cdot \underline{C}_{n+1} \cdot (\underline{M}^n)' \quad (\text{A.75})$$

- where C_{n+1} is the covariance matrix for y^{n+1} . By means of the matrix defined in (A.75), the regression coefficients in (A.70) can be found in the usual way similar to (A.52), and then we have got $a_{n,n-1}$ and a_{nn} . Then (A.63) makes it possible to find a_{nm} ($m < n-1$).

In this way Giaever (1966) created a state variable that satisfied the Markov requirement. In his model, however, a stage was defined as a production cycle (i.e. from a certain point in a lactation to the same point in the next lactation), which means that it was only possible to make decisions once during each lactation. In this study we want to formulate a more flexible model, where decisions can be made at several points of time during a lactation. In the next section is shown how this can be done concerning the state variable for milk yield.

A.2.2 Handling milk yield when decisions are made several times during a lactation

It is assumed that decisions are made at 3 points during each lactation, namely 12, 24 and 36 weeks after last calving. Actual accumulated milk yield (kg FCM) at these points of time is denoted y_n^{12} , y_n^{24} and y_n^{36} respectively, where n is the lactation number. Actual lactation yield (kg of 308 days FCM) is denoted y_n^{44} , because 308 days = 44 weeks. (A.40) is still considered valid, and u_n denotes the same as in the preceding section.

12, 24 or 36 weeks after calving the lactation yield y_n^{44} is not yet known. However, the correlation between each of the variables y_n^{12} , y_n^{24} and y_n^{36} and the variable y_n^{44} is high (in the empirical part of this study correlation coefficients were estimated close to 0.75, 0.85 and 0.95 for $\text{Corr}(y_n^{12}, y_n^{44})$, $\text{Corr}(y_n^{24}, y_n^{44})$ and $\text{Corr}(y_n^{36}, y_n^{44})$ respectively). This means that we are able to predict y_n^{44} rather precisely if we know y_n^{12} , y_n^{24} or y_n^{36} . These 4 variables concerning milk yield during different time periods of lactation are all assumed to be approximately normally distributed. If we regard the n 'th lactation of a certain cow, we get:

$$E(y_n^{44} | y_n^t) = E(y_n^{44}) + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t)) \quad (\text{A.76})$$

- where t is the number of weeks after calving ($t = 12, 24$ or 36). Even if the variables are not normally distributed, the right hand side of (A.76) is still the best linear predictor of y_n^{44} . It is necessary to estimate $E(y_n^{44})$, $\text{Var}(y_n^t)$, and $\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)$.

From (A.40) and (A.41) we have:

$$\begin{aligned} E(y_n^{44}) &= E(b_{no}) + E(b_{n1}x_n^1) + E(b_{n2}x_n^2) + E(u_n) \\ &= b_{no} + b_{n1} \cdot E(x_n^1) + b_{n2} \cdot E(x_n^2) \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Further we find:

$$\begin{aligned} E(y_n^{44}|x_n^1, x_n^2) &= b_{no} + b_{n1}x_n^1 + b_{n2}x_n^2 \\ &= E(y_n^{44}) + b_{n1}(x_n^1 - E(x_n^1)) + b_{n2}(x_n^2 - E(x_n^2)) \\ &= E(y_n^{44}) - k_n \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

k_n defined this way will be fixed during the lactation, and it expresses the deviation from population mean explained by x_n^1 and x_n^2 . If x_n^1 and x_n^2 are normally distributed, the distribution of k_n will be normal too. It is assumed here that k_n is at least approximately normally distributed. Anyhow the mean and variance of k_n is:

$$\begin{aligned} E(k_n) &= E(-b_{n1}(x_n^1 - E(x_n^1)) - b_{n2}(x_n^2 - E(x_n^2))) \\ &= -b_{n1}E(x_n^1 - E(x_n^1)) - b_{n2}E(x_n^2 - E(x_n^2)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(k_n) &= \text{Var}(-b_{n1}(x_n^1 - E(x_n^1)) - b_{n2}(x_n^2 - E(x_n^2))) \\ &= b_{n1}^2 \text{Var}(x_n^1 - E(x_n^1)) + b_{n2}^2 \text{Var}(x_n^2 - E(x_n^2)) \\ &\quad + 2 \text{Cov}(-b_{n1}(x_n^1 - E(x_n^1)), -b_{n2}(x_n^2 - E(x_n^2))) \\ &= b_{n1}^2 \text{Var}(x_n^1) + b_{n2}^2 \text{Var}(x_n^2) + 2b_{n1}b_{n2}\text{Cov}(x_n^1, x_n^2) \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

- where $\text{Var}(x_n^1)$, $\text{Var}(x_n^2)$ and $\text{Cov}(x_n^1, x_n^2)$ must be estimated. If the explanatory variables are independent, however, the covariance term will be zero.

Recalling the definition of u_n from (A.40), we find if the conditional expectation $E(u_n|y_n^t)$ is denoted U_n^t , that the following equation is approximately satisfied:

$$\begin{aligned} U_n^t &= E(y_n^{44}|y_n^t) - E(y_n^{44}|x_n^1, x_n^2) \\ &= E(y_n^{44}) + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t)) - E(y_n^{44}) + k_n \\ &= k_n + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t)) \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

The distribution of U_n^t will be approximately normal, and further:

$$\begin{aligned} E(U_n^t) &= E(k_n) + E\left(\frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t))\right) \\ &= 0 + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} E(y_n^t - E(y_n^t)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

and:

$$\begin{aligned} \text{Var}(U_n^t) &= \text{Var}(k_n) + \text{Var}\left(\frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t))\right) \\ &\quad + 2\text{Cov}(k_n, \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t))) \\ &= \text{Var}(k_n) + \left[\frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)}\right]^2 \text{Var}(y_n^t - E(y_n^t)) \\ &\quad + 2 \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} \text{Cov}(k_n, (y_n^t - E(y_n^t))) \\ &= \text{Var}(k_n) + \frac{(\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t))^2}{(\text{Var}(y_n^t))^2} \cdot \text{Var}(y_n^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} \cdot \text{Cov}(k_n, y_n^t) \\
 & = \text{Var}(k_n) + \frac{(\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t))^2}{\text{Var}(y_n^t)} + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} \text{Cov}(k_n, y_n^t) \quad (\text{A.83})
 \end{aligned}$$

- where $\text{Var}(k_n)$ is known from (A.80) and $\text{Cov}(k_n, y_n^t)$ is deduced as follows:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(k_n, y_n^t) & = E((k_n - E(k_n))(y_n^t - E(y_n^t))) \\
 & = E(k_n(y_n^t - E(y_n^t))) \\
 & = E(-b_{n1} (x_n^1 - E(x_n^1))(y_n^t - E(y_n^t))) \\
 & \quad - E(b_{n2} (x_n^2 - E(x_n^2))(y_n^t - E(y_n^t))) \\
 & = -b_{n1} \text{Cov}(x_n^1, y_n^t) - b_{n2} \text{Cov}(x_n^2, y_n^t) \quad (\text{A.84})
 \end{aligned}$$

- where the covariances $\text{Cov}(x_n^1, y_n^t)$ and $\text{Cov}(x_n^2, y_n^t)$ must be estimated. (A.84) and (A.83) show that a positive connection between the x 'es and y_n^t will reduce the variance of U_n^t . In general we have that if X and y are random variables with zero means:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, y) & = E((X - E(X))(y - E(y))) \\
 & = E((X - 0) \cdot (y - 0)) = E(X \cdot y) \quad (\text{A.85})
 \end{aligned}$$

Using (A.85) we get:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(U_n^t, U_n^s) & = E(U_n^t \cdot U_n^s) \\
 & = E(k_n \cdot k_n) + E(k_n \cdot \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t))) \\
 & \quad + E(k_n \cdot \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^s)}{\text{Var}(y_n^s)} (y_n^s - E(y_n^s)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + E\left(\frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t)) \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^s)}{\text{Var}(y_n^s)} (y_n^s - E(y_n^s))\right) \\
 & = \text{Var}(k_n) + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} \text{Cov}(k_n, y_n^t) \\
 & \quad + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^s)}{\text{Var}(y_n^s)} \text{Cov}(k_n, y_n^s) \\
 & + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t) \cdot \text{Cov}(y_n^{44}, y_n^s)}{\text{Var}(y_n^t) \cdot \text{Var}(y_n^s)} \text{Cov}(y_n^t, y_n^s) \quad (A.86)
 \end{aligned}$$

- where the parameters, which have not been deduced in the preceding formulars, must be estimated. If $s = t$, (A.86) is equal to (A.83), as you would expect.

If m is a lactation of the same cow earlier than n (i.e. $m < n$), u_m is known. Later when the transition probabilities are derived, we need to know the covariance:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(u_m, u_n^t) &= E(u_m \cdot u_n^t) \\
 &= E(u_m \cdot k_n) + E(u_m \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} (y_n^t - E(y_n^t))) \\
 &= \text{Cov}(u_m, k_n) + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} E((u_m - E(u_m))(y_n^t - E(y_n^t))) \\
 &= \text{Cov}(u_m, k_n) + \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} \text{Cov}(u_m, y_n^t) \quad (A.87)
 \end{aligned}$$

However, u_m expresses the variation in milk yield which is not explained by x_m^1 and x_m^2 , during the m 'th lactation. On the other hand k_n expresses the variation in milk yield explained by x_n^1 and x_n^2 during the n 'th lactation. But since x_n^1 and x_n^2 are assumed to be independent of u_m (section A.2.1), the conclusion must be that:

$$\text{Cov}(u_m, k_n) = 0 \quad (A.88)$$

And then we have:

$$\text{Cov}(u_m, u_n^t) = \frac{\text{Cov}(y_n^{44}, y_n^t)}{\text{Var}(y_n^t)} \text{Cov}(u_m, y_n^t) \quad (\text{A.89})$$

The unknown factors in (A.89) can be estimated from the empirical data.

We are able to calculate the state variables v_1, v_2, \dots, v_{n-1} by means of (A.48), but if stage length is less than a production cycle, and the n 'th lactation is not finished at the beginning of present stage, we will not be able to calculate v_n . The problem is solved by redefining the state variable according to (A.90):

$$v_n^t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_{n,n-1} u_{n-1} + a_{nn} u_n^t \quad (\text{A.90})$$

Because of the close connection between y_n^{36} and y_n^{44} (correlation close to 0.95) we will not distinguish v_n^{36} from v_n^{44} ($= v_n$), or in other words, 36 weeks after calving we will assume v_n to be known. However, by (A.90) we will slightly affect the restrictions (A.38) and (A.39), so that the Markov requirement is only approximately satisfied. However, the correlation between y_n^s and y_n^t is very high, and then the correlation between v_n^s and v_n^t must be even higher, because only part of the variation in v_n^t is caused by y_n^t . When the correlation is high, you get a good prediction of v_n^t given v_n^s , even if the Markov requirement is not completely satisfied.

Define a vector:

$$\underline{u}_n = (u_n^{36} \ u_n^{24} \ u_n^{12} \ u_{n-1} \dots \ u_1)' \quad (\text{A.91})$$

\underline{u}_n is a multivariate approximately normally distributed random vector with mean $\underline{0}$ and the covariance matrix \underline{C}_n^U :

$$\underline{C}_n^U = \begin{bmatrix} \text{Var}(u_n^{36}) & \text{Cov}(u_n^{36}, u_n^{24}) & \text{Cov}(u_n^{36}, u_n^{12}) & \text{Cov}(u_n^{36}, u_{n-1}) & \dots & \text{Cov}(u_n^{36}, u_1) \\ \text{Cov}(u_n^{24}, u_n^{36}) & \text{Var}(u_n^{24}) & \text{Cov}(u_n^{24}, u_n^{12}) & \text{Cov}(u_n^{24}, u_{n-1}) & \dots & \text{Cov}(u_n^{24}, u_1) \\ \text{Cov}(u_n^{12}, u_n^{36}) & \text{Cov}(u_n^{12}, u_n^{24}) & \text{Var}(u_n^{12}) & \text{Cov}(u_n^{12}, u_{n-1}) & \dots & \text{Cov}(u_n^{12}, u_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\text{Symmetrical}) & & & & \text{Var}(u_{n-1}) & \dots \text{Cov}(u_{n-1}, u_1) \\ & & & & \text{Cov}(u_{n-2}, u_1) & \vdots \\ & & & & \vdots & \text{Var}(u_1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.92})$$

Define a transformation matrix \underline{A}_n :

$$\underline{A}_n = \begin{bmatrix} a_{nn} & 0 & 0 & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{nn} & 0 & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & 0 & a_{nn} & a_{n,n-1} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{n-1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a_{n-2,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & a_{11} \end{bmatrix} \quad (A.93)$$

Further we will define a vector \underline{v}_n :

$$\underline{v}_n = (v_n^{36} \ v_n^{24} \ v_n^{12} \ v_{n-1} \ \dots \ v_1)' \quad (A.94)$$

Then we get:

$$\underline{v}_n = \underline{A}_n \cdot \underline{U}_n \quad (A.95)$$

- where \underline{v}_n is a multivariate approximately normally distributed random vector with the parameters:

$$E(\underline{v}_n) = \underline{0} \quad (A.96)$$

- and similar to (A.50):

$$\text{Cov}(\underline{v}_n) = \underline{C}_n^V = \underline{A}_n \cdot \underline{C}_n^U \cdot \underline{A}_n' \quad (A.97)$$

The elements of \underline{A}_n are known from section A.2.1, and the elements of \underline{C}_n^U are estimated either directly from the empirical data, or indirectly by means of the formulas (A.83), (A.86) and (A.89).

Knowing the elements of \underline{C}_n^V from (A.97), transition probabilities with respect to milk production are easily deduced. Suppose that at the beginning of a stage (36 weeks after the $(n-1)$ 'th calving) the state variable is in the interval $a_1 < v_{n-1} \leq a_2$. Then you want to know the probability that - subject to this - the state variable v_n^{12}

is in the interval $b_1 < v_n^{12} \leq b_2$ at the beginning of next stage. (v_{n-1}, v_n^{12}) is then regarded as a bivariate normally distributed random variable, where all the parameters are known from (A.96) and (A.97). The transition probability is then calculated as:

$$P(b_1 < v_n^{12} \leq b_2 | a_1 < v_{n-1} \leq a_2) =$$

$$\frac{\int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(v_{n-1}, v_n^{12}) dv_n^{12} dv_{n-1}}{\int_{a_1}^{a_2} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_{n-1}, v_n^{12}) dv_n^{12} dv_{n-1}} \quad (A.98)$$

- where $f(v_{n-1}, v_n^{12})$ is the usual bivariate normal density function. The transition probability $P(c_1 < v_n^{24} \leq c_2 | b_1 < v_n^{12} \leq b_2)$ is calculated in a similar way.

The state variable v_n^t , however, is not a direct measure of milk yield, so we will have to deduce a way of calculating expected milk yield during present and next lactation, when v_n^t is known. U_n^t is a prediction of u_n , and then v_n^t must be a prediction of v_n too. Since U_n^t in the model must be assumed unknown*) we wish to deduce $E(u_n|v_n^t)$ and $E(u_{n+1}|v_n^t)$, which - subject to the remarks above - are equal to $E(u_n|v_n)$ and $E(u_{n+1}|v_n)$. Using notation from (A.50) we get the matrix \underline{C}^{UV} :

$$\underline{C}^{UV} = \underline{A} \cdot \underline{C} \quad (A.99)$$

- where the nm'th element of \underline{C}^{UV} is $\text{Cov}(v_n, u_m)$ (Kristensen, 1982). Then we get:

$$E(u_n|v_n) = \frac{\text{Cov}(v_n, u_n)}{\text{Var}(v_n)} \cdot v_n \quad (A.100)$$

and:

*) However, it is not unknown when we are looking at a particular cow.

$$E(u_{n+1}|v_n) = \frac{\text{Cov}(v_n, u_{n+1})}{\text{Var}(v_n)} v_n \quad (\text{A.100})$$

- where the covariances are known from (A.99) and the variance of v_n is known from (A.50).

A.2.3 Estimation of parameters in the model of milk yield

An estimation technique suggested by Giaever (1966) is used.

The parameters of the model (A.45) are estimated by linear regression. However, this gives rise to some problems, because the dairy herds from the empirical data have been subject to culling. If we do not correct for this, the result will be biased both with respect to estimated average production under given values of the explanatory variables (i.e. in the location of the regression lines), and with respect to the estimated variance around the regression line.

To solve these problems Giaever (1966) suggested the following technique, which will be used in this study:

Until further notice we will assume that no culling takes place during the first lactation. The number of cows that have finished m lactations is denoted N_m . Because cows are culled during second and later lactations we have:

$$N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_M \quad (\text{A.101})$$

We will start by estimating the coefficients b_{10} , b_{11} and b_{12} as well as the variance σ_{11} from the sample of N_1 cows, in the usual way of linear regression. Having these estimates we are able to estimate the corresponding parameters from the sample of N_2 cows having finished second lactation, and so on step by step until the M 'th lactation.

Define the vectors:

$$\underline{u}^m = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m)' \quad (\text{A.102})$$

$$\underline{\sigma}'^m = (\sigma'_{11} \ \sigma'_{12} \ \dots \ \sigma'_{1,m-1})' \quad (\text{A.103})$$

- and the matrix:

$$\underline{C}^m = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \quad (A.104)$$

The vector of regression coefficients of u_m on u_1, u_2, \dots, u_{m-1} is denoted \underline{b}^m . Similar to (A.52) we have:

$$\underline{b}^m = \underline{\sigma}^{m-1} \cdot (\underline{C}^{m-1})^{-1} \quad (A.105)$$

The conditional mean and variance of u_m given u_1, u_2, \dots, u_{m-1} is:

$$E(u_m | u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) = \underline{b}^m \cdot \underline{u}^{m-1} \quad (A.106)$$

$$\text{Var}(u_m | u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) = \sigma_{mm}^2 \cdot \underline{\sigma}^m \cdot (\underline{C}^{m-1})^{-1} \cdot (\underline{\sigma}^m)' \quad (A.107)$$

If we have observed lactation yields y_1, y_2, \dots, y_{m-1} of a certain cow, the expected value of y_m is:

$$\begin{aligned} E(y_m | y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) &= b_{m0} + b_{m1}x_m^1 + b_{m2}x_m^2 + E(u_m | u_1, \dots, u_{m-1}) \\ &= (b_{m0} + b_{m1}x_m^1 + b_{m2}x_m^2) + \underline{b}^m \cdot \underline{u}^{m-1} \end{aligned} \quad (A.108)$$

The elements of \underline{u}^{m-1} are concerning previous lactations, where the parameters already are estimated. Using these estimates, we can estimate the elements of \underline{u}^{m-1} , and then we are able to estimate b_{m0} , b_{m1} , b_{m2} and \underline{b}^m in (A.107) by ordinary multiple linear regression with $x_m^1, x_m^2, u_1, \dots, u_{m-1}$ as the explanatory variables and y_m as the dependent variable. The error mean square will be an estimate of $\text{Var}(u_m | u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$. \underline{C}^{m-1} is concerning previous lactations and have already been estimated. \underline{b}^m and $\text{Var}(u_m | u_1, u_2, \dots, u_m)$ have just been estimated, and then we can arrive at estimates of $\underline{\sigma}^m$ and σ_{mm}^2 :

From (A.105):

$$\underline{\sigma}^m = \underline{b}^m \cdot \underline{C}^{m-1} \quad (\text{A.109})$$

From (A.107):

$$\sigma'_{mm} = \text{Var}(u_m | u_1, u_2, \dots, u_{m-1}) + \underline{\sigma}^m \cdot (\underline{C}^{m-1})^{-1} \cdot (\underline{\sigma}^m)' \quad (\text{A.110})$$

If then we combine \underline{C}^{m-1} with $\underline{\sigma}^m$ and σ'_{mm} we get \underline{C}^m , and are then ready for estimating parameters concerning the $(m+1)'$ th lactation.

Earlier it was assumed that no culling took place during the first lactation. Naturally this assumption does not hold. But then we just have to divide the first lactation into two or more time intervals. These intervals must be defined in such a way that it is proper to assume, that no culling takes place during the first time interval. Then the parameters concerning first lactation will be deduced step by step in the same way as just described above.

APPENDIKS B

B.1 TABELLER VEDRØRENDE OVERGANGSSANDSYNLIGHEDER MED HENSYN TIL MÆLKEPRODUKTION

Tables concerning transition probabilities
with respect to milk production

Tabel B.1 Fra 12 til 24 uger, 1. laktation

Table B.1 From 12 to 24 weeks, 1st lactation

Fra niveau	Til niveau (to class)				
From class	1	2	3	4	5
1	,7891	,1857	,0234	,0018	,0000
2	,2613	,4605	,2198	,0575	,0009
3	,0392	,2691	,3823	,2897	,0197
4	,0020	,0465	,1909	,5369	,2237
5	,0000	,0006	,0106	,1811	,8077

Tabel B.2 Fra 24 til 36 uger, 1. laktation

Table B.2 From 24 to 36 weeks, 1st lactation

Fra niveau	Til niveau (to class)				
From class	1	2	3	4	5
1	,7338	,2307	,0329	,0025	,0001
2	,1959	,4771	,2586	,0675	,0009
3	,0272	,2509	,4027	,3024	,0168
4	,0014	,0441	,2033	,5640	,3872
5	,0000	,0006	,0126	,2100	,7768

Tabel B.3 Fra 36 uger, 1. laktation til 12 uger, 2. laktation

Table B.3 From 36 weeks, 1st lactation to 12 weeks, 2nd lactation

Fra niveau	Til niveau (to class)					
From class	1	2	3	4	5	6
1	,5916	,2984	,0899	,0182	,0018	,0001
2	,1738	,3922	,2865	,1206	,0256	,0013
3	,0464	,2404	,3415	,2600	,1019	,0098
4	,0071	,0804	,2255	,3350	,2811	,0709
5	,0002	,0061	,0414	,1450	,3399	,4674

Tabel B.4 Fra 12 til 24 uger, 2. laktation

Table B.4 From 12 to 24 weeks, 2nd lactation

Fra niveau	Til niveau (to class)					
From class	1	2	3	4	5	6
1	,8947	,1046	,0007	,0000	,0000	,0000
2	,1828	,6533	,1590	,0049	,0000	,0000
3	,0022	,2155	,5767	,1988	,0068	,0000
4	,0000	,0068	,1988	,5767	,2155	,0022
5	,0000	,0000	,0049	,1590	,6533	,1828
6	,0000	,0000	,0000	,0007	,1046	,8947

Tabel B.5 Fra 24 til 36 uger, 2. laktation

Table B.5 From 24 to 36 weeks, 2nd lactation

Fra niveau	Til niveau (to class)					
From class	1	2	3	4	5	6
1	,8650	,1325	,0025	,0000	,0000	,0000
2	,1768	,6210	,1912	,0109	,0001	,0000
3	,0042	,2230	,5407	,2194	,0127	,0000
4	,0000	,0127	,2194	,5407	,2230	,0042
5	,0000	,0001	,0109	,1912	,6210	,1768
6	,0000	,0000	,0000	,0025	,1325	,8650

Tabel B.6 Fra 36 uger, 2. laktation til 12 uger, 3. laktation

Table B.6 From 36 weeks, 2nd lactation to 12 weeks, 3rd lactation

Fra niveau	Til niveau (to class)					
From class	1	2	3	4	5	6
1	,3586	,3234	,1925	,0917	,0302	,0036
2	,1515	,2882	,2691	,1858	,0888	,0166
3	,0788	,2184	,2707	,2412	,1513	,0396
4	,0396	,1513	,2412	,2707	,2184	,0788
5	,0166	,0888	,1858	,2691	,2882	,1515
6	,0036	,0302	,0917	,1925	,3234	,3586

Tabel B.7 Fra 12 til 24 uger, 3. laktation

Table B.7 From 12 to 24 weeks, 3rd lactation

Fra niveau From class	Til niveau (to class)					
	1	2	3	4	5	6
1	,8582	,1375	,0042	,0001	,0000	,0000
2	,2312	,5677	,1846	,0162	,0003	,0000
3	,0111	,2532	,4883	,2252	,0222	,0000
4	,0000	,0222	,2252	,4883	,2532	,0111
5	,0000	,0003	,0162	,1846	,5677	,2312
6	,0000	,0000	,0001	,0042	,1375	,8582

Tabel B.8 Fra 24 til 36 uger, 3. laktation

Table B.8 From 24 to 36 weeks, 3rd lactation

Fra niveau From class	Til niveau (to class)					
	1	2	3	4	5	6
1	,8144	,1698	,0152	,0006	,0000	,0000
2	,2419	,4983	,2178	,0396	,0023	,0001
3	,0260	,2633	,4196	,2426	,0475	,0010
4	,0010	,0475	,2426	,4196	,2633	,0260
5	,0001	,0023	,0396	,2178	,4983	,2419
6	,0000	,0000	,0006	,0152	,1698	,8144

Tabel B.9 Fra 36 uger, 3. laktation til 12 uger, 4. laktation

Table B.9 From 36 weeks, 3rd lactation to 12 weeks, 4th lactation

Fra niveau From class	Til niveau (to class)				
	1	2	3	4	5
1	,5412	,2444	,1257	,0757	,0130
2	,2549	,2734	,2158	,1974	,0585
3	,1322	,2187	,2301	,2874	,1316
4	,0637	,1506	,2048	,3421	,2388
5	,0243	,0830	,1486	,3447	,3994
6	,0044	,0236	,0607	,2258	,6855

Tabel B.10 Fra 12 til 24 uger, 4. laktation

Table B.10 From 12 to 24 weeks, 4th lactation

Fra niveau From class	Til niveau (to class)				
	1	2	3	4	5
1	,9187	,0806	,0007	,0000	,0000
2	,2143	,6291	,1511	,0055	,0000
3	,0036	,2305	,5566	,2088	,0005
4	,0000	,0058	,1379	,6959	,1604
5	,0000	,0000	,0001	,0798	,9201

Tabel B.11 Fra 24 til 36 uger, 4. laktation

Table B.11 From 24 to 36 weeks, 4th lactation

Fra niveau From class	Til niveau (to class)				
	1	2	3	4	5
1	,9119	,0877	,0004	,0000	,0000
2	,1574	,6816	,1579	,0031	,0000
3	,0010	,1952	,6091	,1945	,0002
4	,0000	,0028	,1288	,7427	,1257
5	,0000	,0000	,0000	,0797	,9203

B.2 TABELLER VEDRØRENDE OPTIMALE LØSNINGER

Tabel B.12 Optimal udskiftningspolitik for gården H 64-2 med angivelse af den optimale beslutning i hver af de 176 mulige tilstande.

Table B.12 Optimal replacement policy at the farm H 64-2. The optimal decision in each of the 176 possible states is shown.

TILSTAND	KLV_NR	TIDILAKT	YDELSE	KLV_INT	BESLUT	AFLONN	TAB1	TAB2	TAB3	TAB4
1	1	12	1	.	BEHOLDES	5472	0	511	458	440
2	1	12	2	.	BEHOLDES	5596	0	1134	1004	913
3	1	12	3	.	BEHOLDES	5714	0	1721	1546	1412
4	1	12	4	.	BEHOLDES	5850	0	2399	2175	1992
5	1	12	5	.	BEHOLDES	6001	0	3154	2839	2569
6	1	24	1	11.0	BEHOLDES	5565	0	775	832	914
7	1	24	1	13.0	BEHOLDES	5437	0	138	193	280
8	1	24	1	.	UD STRAKS	5410	69	0	22	71
9	1	24	2	11.0	BEHOLDES	5697	0	1435	1414	1420
10	1	24	2	13.0	BEHOLDES	5581	0	856	835	845
11	1	24	2	.	BEHOLDES	5503	0	468	416	391
12	1	24	3	11.0	BEHOLDES	5794	0	1919	1853	1813
13	1	24	3	13.0	BEHOLDES	5687	0	1385	1318	1284
14	1	24	3	.	BEHOLDES	5583	0	867	772	703
15	1	24	4	11.0	BEHOLDES	5902	0	2460	2343	2253
16	1	24	4	13.0	BEHOLDES	5805	0	1975	1858	1773
17	1	24	4	.	BEHOLDES	5669	0	1298	1154	1037
18	1	24	5	11.0	BEHOLDES	6051	0	3206	2997	2816
19	1	24	5	13.0	BEHOLDES	5967	0	2789	2582	2407
20	1	24	5	.	BEHOLDES	5800	0	1954	1723	1519
21	1	36	1	11.0	BEHOLDES	5672	0	1009	1085	1400
22	1	36	1	13.0	BEHOLDES	5525	0	274	326	439
23	1	36	1	15.0	UD STRAKS	5470	28	0	18	51
24	1	36	1	16.5	UD STRAKS	5470	568	0	5	32
25	1	36	2	11.0	BEHOLDES	5779	0	1548	1547	1829
26	1	36	2	13.0	BEHOLDES	5650	0	900	875	916
27	1	36	2	15.0	BEHOLDES	5604	0	671	616	583
28	1	36	2	16.5	BEHOLDES	5515	0	227	159	120
29	1	36	3	11.0	BEHOLDES	5863	0	1967	1920	2183
30	1	36	3	13.0	BEHOLDES	5743	0	1367	1296	1296
31	1	36	3	15.0	BEHOLDES	5705	0	1179	1081	1008
32	1	36	3	16.5	BEHOLDES	5627	0	788	677	599
33	1	36	4	11.0	BEHOLDES	5958	0	2439	2343	2583
34	1	36	4	13.0	BEHOLDES	5848	0	1894	1772	1725
35	1	36	4	15.0	BEHOLDES	5820	0	1751	1604	1487
36	1	36	4	16.5	BEHOLDES	5754	0	1420	1261	1138
37	1	36	5	11.0	BEHOLDES	6091	0	3107	2921	3121
38	1	36	5	13.0	BEHOLDES	6002	0	2664	2451	2319
39	1	36	5	15.0	BEHOLDES	5991	0	2607	2374	2178
40	1	36	5	16.5	BEHOLDES	5948	0	2389	2143	1942

Tabel B.12 fortsat:

TILSTAND KLV_NR TIDILAKT YDELSE KLV_INT BESLUT						AFLONN	TAB1	TAB2	TAB3	TAB4
41	2	12	1	.	BEHOLDES	5489	0	96	179	58
42	2	12	2	.	BEHOLDES	5591	0	608	626	442
43	2	12	3	.	BEHOLDES	5679	0	1048	1028	807
44	2	12	4	.	BEHOLDES	5759	0	1444	1391	1138
45	2	12	5	.	BEHOLDES	5841	0	1857	1766	1477
46	2	12	6	.	BEHOLDES	5938	0	2340	2183	1832
47	2	24	1	11.0	BEHOLDES	5460	0	31	79	184
48	2	24	1	13.0	UD STRAKS	5454	231	0	23	107
49	2	24	1	.	UD OM 4 UGER	5455	154	5	0	52
50	2	24	2	11.0	BEHOLDES	5565	0	556	537	578
51	2	24	2	13.0	BEHOLDES	5510	0	280	244	270
52	2	24	2	.	BEHOLDES	5468	0	74	13	11
53	2	24	3	11.0	BEHOLDES	5635	0	906	848	852
54	2	24	3	13.0	BEHOLDES	5585	0	657	588	578
55	2	24	3	.	BEHOLDES	5514	0	303	210	176
56	2	24	4	11.0	BEHOLDES	5697	0	1216	1125	1095
57	2	24	4	13.0	BEHOLDES	5654	0	1004	905	865
58	2	24	4	.	BEHOLDES	5559	0	529	407	345
59	2	24	5	11.0	BEHOLDES	5767	0	1568	1438	1371
60	2	24	5	13.0	BEHOLDES	5734	0	1399	1266	1192
61	2	24	5	.	BEHOLDES	5610	0	781	627	533
62	2	24	6	11.0	BEHOLDES	5857	0	2015	1818	1688
63	2	24	6	13.0	BEHOLDES	5834	0	1900	1709	1576
64	2	24	6	.	BEHOLDES	5683	0	1148	939	791
65	2	36	1	11.0	BEHOLDES	5582	0	358	673	1192
66	2	36	1	13.0	UD STRAKS	5511	112	0	122	312
67	2	36	1	15.0	UD STRAKS	5511	589	0	79	214
68	2	36	1	16.5	UD STRAKS	5511	1248	0	50	157
69	2	36	2	11.0	BEHOLDES	5672	0	805	1072	1591
70	2	36	2	13.0	BEHOLDES	5596	0	427	491	629
71	2	36	2	15.0	BEHOLDES	5515	0	23	47	128
72	2	36	2	16.5	UD OM 4 UGER	5511	566	4	0	54
73	2	36	3	11.0	BEHOLDES	5723	0	1063	1302	1821
74	2	36	3	13.0	BEHOLDES	5659	0	740	769	877
75	2	36	3	15.0	BEHOLDES	5586	0	378	369	418
76	2	36	3	16.5	UD OM 4 UGER	5518	199	35	0	23
77	2	36	4	11.0	BEHOLDES	5772	0	1305	1519	2037
78	2	36	4	13.0	BEHOLDES	5717	0	1030	1028	1109
79	2	36	4	15.0	BEHOLDES	5652	0	705	667	688
80	2	36	4	16.5	BEHOLDES	5551	0	201	138	133
81	2	36	5	11.0	BEHOLDES	5827	0	1580	1766	2284
82	2	36	5	13.0	BEHOLDES	5782	0	1359	1323	1373
83	2	36	5	15.0	BEHOLDES	5726	0	1075	1006	995
84	2	36	5	16.5	BEHOLDES	5634	0	614	520	484
85	2	36	6	11.0	BEHOLDES	5907	0	1984	2122	2640
86	2	36	6	13.0	BEHOLDES	5882	0	1856	1762	1760
87	2	36	6	15.0	BEHOLDES	5840	0	1646	1522	1456
88	2	36	6	16.5	BEHOLDES	5763	0	1260	1112	1024

Tabel B.12 fortsat:

	TILSTAND	KLV_NR	TIDLILAKT	YDELSE	KLV_INT	BESLUT	AFLONN	TAB1	TAB2	TAB3	TAB4
89	3	12	1	.	UD OM 8 UGER	5497	74	216	69	0	
90	3	12	2	.	BEHOLDES	5555	0	506	280	132	
91	3	12	3	.	BEHOLDES	5623	0	847	576	381	
92	3	12	4	.	BEHOLDES	5702	0	1243	929	692	
93	3	12	5	.	BEHOLDES	5796	0	1710	1351	1068	
94	3	12	6	.	BEHOLDES	5906	0	2263	1825	1462	
95	3	24	1	11.0	UD STRAKS	5492	324	0	180	422	
96	3	24	1	13.0	UD STRAKS	5492	577	0	153	363	
97	3	24	1	.	UD STRAKS	5492	536	0	132	311	
98	3	24	2	11.0	BEHOLDES	5524	0	162	255	415	
99	3	24	2	13.0	UD STRAKS	5492	103	0	68	194	
100	3	24	2	.	UD STRAKS	5492	331	0	48	146	
101	3	24	3	11.0	BEHOLDES	5587	0	479	522	636	
102	3	24	3	13.0	BEHOLDES	5542	0	253	272	350	
103	3	24	3	.	UD STRAKS	5492	139	0	0	50	
104	3	24	4	11.0	BEHOLDES	5652	0	804	800	870	
105	3	24	4	13.0	BEHOLDES	5620	0	641	614	647	
106	3	24	4	.	BEHOLDES	5511	0	96	51	56	
107	3	24	5	11.0	BEHOLDES	5730	0	1191	1137	1160	
108	3	24	5	13.0	BEHOLDES	5713	0	1106	1030	1014	
109	3	24	5	.	BEHOLDES	5571	0	397	305	263	
110	3	24	6	11.0	BEHOLDES	5822	0	1653	1512	1453	
111	3	24	6	13.0	BEHOLDES	5824	0	1661	1500	1400	
112	3	24	6	.	BEHOLDES	5673	0	904	728	604	
113	3	36	1	11.0	BEHOLDES	5629	0	402	909	1490	
114	3	36	1	13.0	UD STRAKS	5549	227	0	240	524	
115	3	36	1	15.0	UD STRAKS	5549	941	0	215	483	
116	3	36	1	16.5	UD STRAKS	5549	1883	0	210	472	
117	3	36	2	11.0	BEHOLDES	5700	0	758	1197	1778	
118	3	36	2	13.0	BEHOLDES	5603	0	269	428	637	
119	3	36	2	15.0	UD STRAKS	5549	300	0	132	317	
120	3	36	2	16.5	UD STRAKS	5549	1133	0	126	306	
121	3	36	3	11.0	BEHOLDES	5744	0	979	1380	1960	
122	3	36	3	13.0	BEHOLDES	5663	0	570	683	849	
123	3	36	3	15.0	BEHOLDES	5566	0	84	168	306	
124	3	36	3	16.5	UD STRAKS	5549	685	0	78	211	
125	3	36	4	11.0	BEHOLDES	5797	0	1242	1607	2187	
126	3	36	4	13.0	BEHOLDES	5730	0	908	977	1102	
127	3	36	4	15.0	BEHOLDES	5648	0	499	537	631	
128	3	36	4	16.5	UD STRAKS	5549	213	0	33	121	
129	3	36	5	11.0	BEHOLDES	5844	0	1477	1803	2383	
130	3	36	5	13.0	BEHOLDES	5793	0	1223	1245	1327	
131	3	36	5	15.0	BEHOLDES	5728	0	896	887	933	
132	3	36	5	16.5	BEHOLDES	5598	0	246	231	272	
133	3	36	6	11.0	BEHOLDES	5927	0	1892	2151	2731	
134	3	36	6	13.0	BEHOLDES	5904	0	1777	1718	1726	
135	3	36	6	15.0	BEHOLDES	5867	0	1593	1501	1465	
136	3	36	6	16.5	BEHOLDES	5759	0	1052	954	912	

Tabel B.12 fortsat:

	TILSTAND	KLV_NR	TIDILAKT	YDELSE	KLV_INT	BESLUT	AFLONN	TAB1	TAB2	TAB3	TAB4
137	4	12	1	.	BEHOLDES	5559	0	335	134	15	
138	4	12	2	.	BEHOLDES	5617	0	628	352	161	
139	4	12	3	.	BEHOLDES	5660	0	842	522	290	
140	4	12	4	.	BEHOLDES	5741	0	1246	877	598	
141	4	12	5	.	BEHOLDES	5873	0	1904	1447	1084	
142	4	24	1	11.0	UD STRAKS	5530	384	0	154	362	
143	4	24	1	13.0	UD STRAKS	5530	557	0	128	321	
144	4	24	1	.	UD STRAKS	5530	406	0	95	231	
145	4	24	2	11.0	UD STRAKS	5530	3	0	83	226	
146	4	24	2	13.0	UD STRAKS	5530	213	0	57	178	
147	4	24	2	.	UD STRAKS	5530	233	0	29	100	
148	4	24	3	11.0	BEHOLDES	5590	0	303	344	449	
149	4	24	3	13.0	BEHOLDES	5558	0	139	156	234	
150	4	24	3	.	UD OM 4 UGER	5532	102	9	0	33	
151	4	24	4	11.0	BEHOLDES	5651	0	606	601	664	
152	4	24	4	13.0	BEHOLDES	5635	0	525	495	526	
153	4	24	4	.	BEHOLDES	5550	0	103	51	42	
154	4	24	5	11.0	BEHOLDES	5748	0	1090	1001	988	
155	4	24	5	13.0	BEHOLDES	5756	0	1134	1022	967	
156	4	24	5	.	BEHOLDES	5627	0	488	359	274	
157	4	36	1	11.0	BEHOLDES	5662	0	279	716	1366	
158	4	36	1	13.0	UD STRAKS	5606	247	0	296	620	
159	4	36	1	15.0	UD STRAKS	5606	744	0	207	458	
160	4	36	1	16.5	UD STRAKS	5606	1726	0	201	447	
161	4	36	2	11.0	BEHOLDES	5727	0	608	996	1646	
162	4	36	2	13.0	BEHOLDES	5648	0	211	435	699	
163	4	36	2	15.0	UD STRAKS	5606	172	0	141	329	
164	4	36	2	16.5	UD STRAKS	5606	1061	0	135	318	
165	4	36	3	11.0	BEHOLDES	5766	0	799	1159	1809	
166	4	36	3	13.0	BEHOLDES	5701	0	476	660	889	
167	4	36	3	15.0	BEHOLDES	5638	0	160	263	414	
168	4	36	3	16.5	UD STRAKS	5606	674	0	97	243	
169	4	36	4	11.0	BEHOLDES	5808	0	1014	1342	1992	
170	4	36	4	13.0	BEHOLDES	5761	0	775	911	1101	
171	4	36	4	15.0	BEHOLDES	5712	0	533	593	703	
172	4	36	4	16.5	UD STRAKS	5606	241	0	54	159	
173	4	36	5	11.0	BEHOLDES	5886	0	1400	1670	2320	
174	4	36	5	13.0	BEHOLDES	5868	0	1311	1364	1483	
175	4	36	5	15.0	BEHOLDES	5847	0	1204	1186	1222	
176	4	36	5	16.5	BEHOLDES	5714	0	540	516	547	
177	BEHOLDES	4390	0	0	0	0	

TABEL B.13. OPTIMALE BESLUTNINGER FOR DE ENKELTE KØR
TABLE B.13. OPTIMAL DECISIONS CONCERNING SINGLE COWS

----- GAARD=642 -----

KO_NR	KLV_NR	TIDILAKT	YDELSE	KLV_INT	BESLUT	TAB1	TAB2	TAB3	TAB4
239	4	36	LIDT UNDER MIDDLE	11	BEHOLDES	0	799	1159	1809
240	4	24	HØJ	11	BEHOLDES	0	1090	1001	988
243	4	24	LAV	13	UD STRAKS	213	0	57	178
248	4	36	LIDT UNDER MIDDLE	11	BEHOLDES	0	799	1159	1809
250	4	36	HØJ	13	BEHOLDES	0	1311	1364	1483
251	4	12	HØJ	.	BEHOLDES	0	1904	1447	1084
257	4	36	HØJ	11	BEHOLDES	0	1400	1670	2320
280	4	24	LIDT UNDER MIDDLE	13	BEHOLDES	0	139	156	234
296	4	12	HØJ	.	BEHOLDES	0	1904	1447	1084
304	3	36	HØJ	11	BEHOLDES	0	1477	1803	2383
307	3	36	LAV	11	BEHOLDES	0	758	1197	1778
314	3	24	MEGET HØJ	13	BEHOLDES	0	1661	1500	1400
318	3	12	HØJ	.	BEHOLDES	0	1710	1351	1068
326	3	12	HØJ	.	BEHOLDES	0	1710	1351	1068
334	2	36	HØJ	11	BEHOLDES	0	1580	1766	2284
339	2	36	LAV	.	UD STRAKS
342	2	24	HØJ	11	BEHOLDES	0	1568	1438	1371
344	2	24	MEGET HØJ	11	BEHOLDES	0	2015	1818	1688
352	2	24	MEGET HØJ	13	BEHOLDES	0	1900	1709	1576
353	2	12	LIDT UNDER MIDDLE	.	BEHOLDES	0	1048	1028	807
355	2	12	HØJ	.	BEHOLDES	0	1857	1766	1477
364	2	12	MEGET HØJ	.	BEHOLDES	0	2340	2183	1832
365	2	12	MEGET HØJ	.	BEHOLDES	0	2340	2183	1832
383	1	36	HØJ	11	BEHOLDES	0	3107	2921	3121
394	1	24	HØJ	11	BEHOLDES	0	3206	2997	2816
395	1	24	LIDT OVER MIDDLE	13	BEHOLDES	0	1975	1858	1773
396	1	24	HØJ	11	BEHOLDES	0	3206	2997	2816
414	1	12	HØJ	.	BEHOLDES	0	3154	2839	2569
415	1	12	LIDT OVER MIDDLE	.	BEHOLDES	0	2399	2175	1992
416	1	12	LIDT UNDER MIDDLE	.	BEHOLDES	0	1721	1546	1412
417	1	12	LIDT OVER MIDDLE	.	BEHOLDES	0	2399	2175	1992
418	1	12	HØJ	.	BEHOLDES	0	3154	2839	2569
419	1	12	LIDT OVER MIDDLE	.	BEHOLDES	0	2399	2175	1992

TABEL B.14. INDBYRDENS PRIORITERING AF KØR
TABLE B.14. PRIORITY LIST OF COWS

GAARD=642 -----

KO_NR	KLV_NR	TIDILAKT	YDELSE	KLV_INT	GEVINST	VURDERET
339	2	36	LAV	.	.	82-04-07
243	4	24	LAV	13	-213	82-04-07
254	4	24	LAV	.	-132	82-02-03
338	2	12	MEGET LAV	.	62	82-02-03
280	4	24	LIDT UNDER MIDDEL	13	139	82-04-07
311	3	12	LAV	.	285	82-03-10
398	1	12	MEGET LAV	.	440	82-02-03
405	1	12	MEGET LAV	.	457	82-03-10
357	2	12	LAV	.	630	82-03-10
316	3	24	LIDT OVER MIDDEL	13	660	82-02-03
307	3	36	LAV	11	758	82-04-07
387	1	24	LIDT UNDER MIDDEL	.	773	82-03-10
390	1	24	LIDT UNDER MIDDEL	.	773	82-03-10
239	4	36	LIDT UNDER MIDDEL	11	799	82-04-07
248	4	36	LIDT UNDER MIDDEL	11	799	82-04-07
389	1	24	MEGET LAV	11	832	82-03-10
336	2	24	LIDT UNDER MIDDEL	11	868	82-02-03
340	2	24	LIDT UNDER MIDDEL	11	868	82-02-03
400	1	12	LAV	.	914	82-02-03
236	4	24	HØJ	13	975	82-02-03
407	1	12	LAV	.	1004	82-03-10
409	1	12	LAV	.	1004	82-03-10
411	1	12	LAV	.	1004	82-03-10
353	2	12	LIDT UNDER MIDDEL	.	1048	82-04-07
240	4	24	HØJ	11	1090	82-04-07
385	1	24	LIDT OVER MIDDEL	.	1156	82-03-10
250	4	36	HØJ	13	1311	82-04-07
320	3	12	HØJ	.	1362	82-03-10
337	2	24	HØJ	11	1388	82-02-03
361	2	12	LIDT OVER MIDDEL	.	1397	82-03-10
362	2	12	LIDT OVER MIDDEL	.	1397	82-03-10
257	4	36	HØJ	11	1400	82-04-07
397	1	12	LIDT UNDER MIDDEL	.	1413	82-02-03
242	4	12	HØJ	.	1453	82-03-10
304	3	36	HØJ	11	1477	82-04-07
346	2	12	HØJ	.	1487	82-02-03
354	2	12	HØJ	.	1487	82-02-03
308	3	24	MEGET HØJ	13	1510	82-03-10
408	1	12	LIDT UNDER MIDDEL	.	1546	82-03-10
342	2	24	HØJ	11	1568	82-04-07
334	2	36	HØJ	11	1580	82-04-07
314	3	24	MEGET HØJ	13	1661	82-04-07
231	4	36	HØJ	11	1676	82-03-10
318	3	12	HØJ	.	1710	82-04-07
326	3	12	HØJ	.	1710	82-04-07
416	1	12	LIDT UNDER MIDDEL	.	1721	82-04-07
388	1	24	HØJ	.	1725	82-03-10
358	2	12	HØJ	.	1772	82-03-10
344	2	24	MEGET HØJ	11	1829	82-03-10
347	2	12	MEGET HØJ	.	1843	82-02-03

Tabel B.14 fortsat:

GAARD=642

KO_NR	KLV_NR	TIDILAKT	YDELSE	KLV_INT	GEVINST	VURDERET
355	2	12	HØJ	.	1857	82-04-07
352	2	24	MEGET HØJ	13	1900	82-04-07
251	4	12	HØJ	.	1904	82-04-07
296	4	12	HØJ	.	1904	82-04-07
395	1	24	LIDT OVER MIDDEL	13	1975	82-04-07
402	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2175	82-03-10
403	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2175	82-03-10
406	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2175	82-03-10
412	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2175	82-03-10
413	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2175	82-03-10
415	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2175	82-03-10
384	1	24	LIDT OVER MIDDEL	11	2256	82-02-03
364	2	12	MEGET HØJ	.	2340	82-04-07
365	2	12	MEGET HØJ	.	2340	82-04-07
417	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2399	82-04-07
419	1	12	LIDT OVER MIDDEL	.	2399	82-04-07
401	1	12	HØJ	.	2572	82-02-03
414	1	12	HØJ	.	2840	82-03-10
386	1	24	HØJ	11	3000	82-03-10
391	1	24	HØJ	11	3000	82-03-10
383	1	36	HØJ	11	3107	82-04-07
418	1	12	HØJ	.	3154	82-04-07
394	1	24	HØJ	11	3206	82-04-07
396	1	24	HØJ	11	3206	82-04-07

B.3 TABELLER OVER DAGLIG AFLØNNING TIL STALD OG ARBEJDE PÅ KORT SIGT

Tabel B.15 Aflønning til stald og arbejde for ko af de tunge racer ved forskellig mælkeydelse, tilvækst og fodereffektivitet ved tildeling af 13 FE/dag. Kr. pr. dag.

Forventede priser, kr. pr. kg marginalt	Forventet dgl. produktion og fodereffektivitet (Eff.)					
	kg 4%	16	14	12	10	8
	kg tilv.: 0,2	0,2	0,6	0,6	1,0	1,0
4% mælk	Tilv.	Eff.	Høj	Lav	Høj	Lav
	9,00	10,80	6,00	4,80	0,00	÷1,20
2,40	12,00	11,40	6,60	6,60	1,80	1,80
	15,00	12,00	7,20	8,40	3,60	4,80
	18,00	12,60	7,80	10,20	5,40	7,80
	9,00	14,00	8,80	7,20	2,00	0,40
2,60	12,00	14,60	9,40	9,00	3,80	3,40
	15,00	15,20	10,00	10,80	5,60	6,40
	18,00	15,80	10,60	12,60	7,40	9,40
	9,00	17,20	11,60	9,60	4,00	2,00
2,80	12,00	17,80	12,20	11,40	5,80	5,00
	15,00	18,40	12,80	13,20	7,60	8,00
	18,00	19,00	13,40	15,00	9,40	11,00
	9,00	20,40	14,40	12,00	6,00	3,60
3,00	12,00	21,00	15,00	13,80	7,80	6,60
	15,00	21,60	15,60	15,60	9,60	9,60
	18,00	22,20	16,20	17,40	11,40	12,60

Forudsætninger: Foderpris 1,80 kr./FE. Renter 4,00 kr./dag.
 Diverse 2,00 kr./dag. Prisændringeres betydning:
 ±10 øre/FE = ±1,30 kr./dag.

Tabel B.16 Aflønning til stald og arbejde for ko af de tunge racer ved forskellig mælkelydelse, tilvækst og fodereffektivitet ved tildeling af 11 FE/dag. Kr. pr. dag.

Forventede priser, kr. pr. kg marginalt	Forventet dgl. produktion og fodereffektivitet (Eff.)				
	kg 4%: kg	11	9	7	5
	tilv.: tilv.	0,2	0,2	0,6	0,6
4% mælk	Tilv. Eff.	Høj	Lav	Høj	Lav
2,60	9,00	6,80	1,60	0,00	÷5,20
	12,00	7,40	1,00	1,80	÷3,40
	15,00	8,00	0,40	3,60	÷1,60
	18,00	8,60	÷0,20	5,40	0,20
2,80	9,00	9,00	3,40	1,40	÷4,20
	12,00	9,60	4,00	3,20	÷2,40
	15,00	10,20	4,60	5,00	÷0,60
	18,00	10,80	5,20	6,80	1,20
3,00	9,00	11,20	5,20	2,80	÷3,20
	12,00	11,80	5,80	4,60	÷1,40
	15,00	12,40	6,40	6,40	0,40
	18,00	13,00	7,00	8,20	2,20

Forudsætninger: Foderpris 1,60 kr./FE. Renter 4,00 kr./dag.
Diverse 2,00 kr./dag. Prisændringers betydning:
± 10 øre/FE = ± 1,10 kr./dag.

Tabel B.17 Aflønning til stald og arbejde for goldko (tunge racer) under forskellige forudsætninger m.h.t. forventet tilvækstværdi og antal golddage. Kr. pr. dag.

Tilvækst- værdi, forv. ialt kr.	Antal forventede golddage				
	84	98	112	126	140
1.200	1,29	÷0,76	÷2,29	÷3,48	÷4,43
1.600	6,05	3,33	1,29	÷0,30	÷1,57
2.000	10,81	7,41	4,86	2,87	1,29
2.400	15,57	11,49	8,43	6,05	4,14

Forudsætninger: Foderpris 1,30 kr./FE. Renter 4,00 kr./dag.
Diverse 1,20 kr./dag. Prisændringers betydning:
± 10 øre/FE = ± 0,60 kr./dag.