

## En Udbyttekurve.

Af K. A. Bondorff.

Ved Opgørelsen af Forsøg med aftrappede Gødningsmængder maa man som Regel tage Hensyn til, at Udbyttet ikke stiger proportionalt med den til Planternes Raadighed staaende Næringsstofmængde, men »langsommere«, et Forhold, man har udtrykt i Reglen om det aftagende Merudbytte, hvormed jo ikke menes, at Merudbyttet aftager med stigende Næringsstofmængder, men at Udbyttetilvæksterne pr. tilført Gødningsenhed aftager, hvorfor man korrekttere, men ogsaa lidt mere omstændeligt, burde tale om Reglen om de aftagende Udbyttetilvækster.

Ved Opgørelsen har man i Reglen benyttet den saakaldte Mitscherlichs Ligning:

$$y = A(1 \div 10^{-kx}) \quad (1) \text{ eller i en anden Form:}$$

$$\log(A \div y) = \log A \div kx \quad (2),$$

hvor  $y$  er Udbytte,  $x$  den til Raadighed staaende Næringsstofmængde,  $A$  og  $k$  Konstanter, der benævnes henholdsvis Maksimaludbyttet og Virkningsfaktoren.

Mitscherlichs Ligning turde nu være saa kendt, at en nærmere Omtale vil være overflødig. Her skal blot nævnes, at M.s Ligning ikke eksakt gengiver Forholdet mellem Udbytte og Næringsstofmængde, men at den — ved de Næringsstofmængder, der forekommer i Praksis — er en særdeles god Tilnærmelse til de virkelige Forhold.

Under de Forhold, hvor Mitscherlichs Ligning kan anvendes, vil imidlertid ogsaa en anden Ligning kunne bruges, nemlig Ligningen:

$$y = \frac{Ax}{k+x} \quad (3)$$

Da denne Ligning gør fuldkommen saa god Fyldest som Mitscherlichs Ligning, men er adskilligt lettere at regne med, skal

den her behandles lidt nærmere og anbefales til almindelig Anvendelse ved Opgørelse af Forsøg med aftrappede Gødningsmængder.

Ligningen (3), hvis modsvarende Kurve er en Hyperbel, frembyder samme Fordel som Mitscherlichs Ligning, at den beholder sin Form, naar man, saaledes som man i Forsøgets Praksis som oftest maa gøre, maa regne med Merudbytte og tilført Gødningsmængde, fordi den absolutte Mængde Næringsstof, der staar til Afgrødens Raadighed ikke er kendt. Ligningen faar da Formen:

$$v = \frac{at}{b \div t} \quad (4)$$

hvor  $v$  er Merudbytte (Virkingen),  $t$  den tilførte Gødningsmængde,  $a$  og  $b$  Konstanter.

Sammenhængen mellem (3) og (4) vil fremgaa af følgende:

Man har

$$y = \frac{Ax}{k+x} \quad (3) \text{ og}$$

$$y_0 = \frac{Af}{k+f} \quad (5)$$

hvor  $y_0$  er Udbyttet af Ugødet og  $f$  den Næringsmængde, som Jorden har leveret. Trækkes (5) fra (3) har man:

$$y \div y_0 = \frac{Ax}{k+x} \div \frac{Af}{k+f} \quad (6), \text{ hvor } y \div y_0 = v.$$

Højre Side af (6) kan nu omformes saaledes:

$$\frac{Ax}{k+x} \div \frac{Af}{k+f} = \frac{Ax \div \frac{Af(k+x)}{k+f}}{k+x} = \frac{Axk \div Afk}{k+x \div f+f} = \frac{Ak}{(k+f) + (x \div f)} = \frac{Ak}{(k+f) + t}$$

idet  $x \div f = t$ . Kaldes  $\frac{Ak}{k+f}$  for  $a$ ,  $(k+f)$  for  $b$ , har man

$$v = \frac{at}{b+t} \quad (4)$$

$a = \frac{Ak}{k+f}$  er endvidere lig  $A \div \frac{Af}{k+f}$ , saaledes at

$$a = A \div y_0 \quad (7)$$

$$\text{og } b = k+f, \quad (8)$$

hvorved Relationen mellem Udbytteligningens Konstanter og Merudbytteligningens Konstanter er givet.

Ligningen (4) vil være den, man sædvanlig vil benytte. Den indeholder 2 Konstanter,  $a$  og  $b$ , og Forsøget maa derfor være udført med mindst 2 forskellige Gødningsmængder, for

at Konstanterne kan beregnes. Man maa altsaa have i alt Fald følgende to Talpar:  $t_1$  og  $v_1$ ,  $t_2$  og  $v_2$ . De to Konstanter kan da beregnes af Formlerne:

$$a = \frac{v_1 v_2 (t_2 \div t_1)}{v_1 t_2 \div v_2 t_1} \quad (9) \text{ og}$$

$$b = \frac{t_1 t_2 (v_2 \div v_1)}{v_1 t_2 \div v_2 t_1} \quad (10).$$

De to Formler for Beregning af Ligningens Konstanter er ikke særlig indviklede. Og navnlig maa det fremhæves, at  $t_1$  og  $t_2$  kan have vilkaarlige Værdier, altsaa ikke behøver at være ækvidistante, saaledes som det er nødvendigt ved Beregningen af Konstanterne til Mitscherlichs Ligning.

Ønsker man af Merudbytteligningen at beregne den Næringsstofmængde,  $f$ , som Jorden har stillet til Raadighed, har man:

$$f = \frac{b \cdot y_0}{a + y_0}, \quad (11)$$

hvor  $y_0$  er Udbyttet fra Ugødet.

Anvendelsen af Ligningen skal illustreres med et Par Eksempler. Ved Forsøgene ved Aarslev har man som Generalgennemsnit (alle Afgrøder og alle Aar) fundet følgende:

|                         | Staldgødning: |      |         | Kunstgødning: |      |
|-------------------------|---------------|------|---------|---------------|------|
| $t =$ .....             | $1/2$         | 1    | $1 1/2$ | $1/2$         | 1    |
| $v =$ F.-E. pr. ha .... | 734           | 1162 | 1457    | 1116          | 1552 |

Ved Hjælp af Formlerne (9) og (10) beregnes følgende Merudbytteligninger:

$$v = \frac{2787.3 \cdot t}{1.40 + t} \quad (12). \text{ Beregnet af } 1/2 \text{ og } 1 \text{ Staldgødning.}$$

$$v = \frac{2959.8 \cdot t}{1.55 + t} \quad (13). \text{ Beregnet af } 1 \text{ og } 1 1/2 \text{ Staldgødning.}$$

$$v = \frac{2547.1 \cdot t}{0.64 + t} \quad (14). \text{ Beregnet af } 1/2 \text{ og } 1 \text{ Kunstgødning.}$$

Indsættes i disse Ligninger  $t = 1/2, 1$  og  $1 1/2$ , faar man:

|                         | Staldgødning: |      |         | Kunstgødning: |      |
|-------------------------|---------------|------|---------|---------------|------|
| $t =$ .....             | $1/2$         | 1    | $1 1/2$ | $1/2$         | 1    |
| $v =$ F.-E. pr. ha .... | 734           | 1161 | (1442)  | 1117          | 1553 |
|                         | (722)         | 1161 | 1456    | —             | —    |

Til Sammenligning skal anføres, at de tilsvarende Mitscherlichligninger har Formen:

$\log(1760.6 \div v) = \log 1760.6 \div 0.46852 \cdot t$  (15). Beregnet af 0,  $\frac{1}{2}$  og 1 Staldg.  
 $\log(2143.5 \div v) = \log 2143.5 \div 0.34438 \cdot t$  (16). Beregnet af  $\frac{1}{2}$ , 1 og  $\frac{1}{2}$  Stg.  
 $\log(1834.8 \div v) = \log 1834.8 \div 0.81304 \cdot t$  (17). Beregn. af 0,  $\frac{1}{2}$  og 1 Kunstg.

Indsættes her  $t = \frac{1}{2}$ , 1 og  $1\frac{1}{2}$  faar man:

| t = .....             | Staldgødning: |      |                | Kunstgødning: |      |
|-----------------------|---------------|------|----------------|---------------|------|
|                       | $\frac{1}{2}$ | 1    | $1\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1    |
| v = F.-E. pr. ha .... | 734           | 1162 | (1412)         | 1115          | 1553 |
|                       | 701           | 1173 | 1491           | —             | —    |

Det vil ses, at Ligningen (4) gengiver Forsøgsresultaterne fuldt saa godt som Mitscherlichs Ligning og at f. Eks. det Merudbytte, der ud fra Merudbyttetalene efter  $\frac{1}{2}$  og 1 Staldg. kan beregnes for Merudbyttet efter  $1\frac{1}{2}$  Staldgødning, stemmer bedre med det observerede Resultat, naar Ligning (4) benyttes i Stedet for Mitscherlichs Ligning.

Beregnes f, idet Udbyttet for Ugødet ( $y_0$ ) er 2294 F.-E. pr. ha, faar man:

| Ligning .. | Staldgødning: |      | Staldgødning: |      | Kunstgødning: |      |
|------------|---------------|------|---------------|------|---------------|------|
|            | (12)          | (13) | (15)          | (16) | (14)          | (17) |
| f = .....  | 0.63          | 0.63 | 0.77          | 0.92 | 0.30          | 0.43 |

Ligning (4) og Mitscherlichs Ligning fører altsaa til noget forskellige f-Værdier. Det efter (4) fundne Indhold af »Staldgødning« i Jorden er (gennemsnitligt) 0.66 Staldg., medens Mitscherlichs Ligning giver 0.85. Kunstgødningsindholdet i Jorden findes efter (4) til 0.30 Kunstg., efter Mitscherlich til 0.43 Kunstg. Vil man paa dette Grundlag (f-Værdierne) beregne

v, F.-E. pr. ha

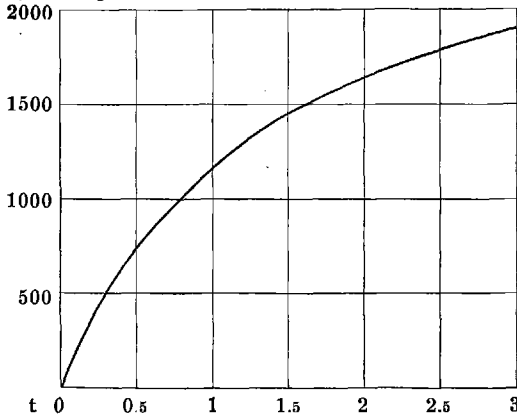


Fig. 1.

Staldgødningens Værdital, finder man 0.45 efter Ligning (4), 0.51 efter Mitscherlichs Ligning. Ligning (4) synes saaledes at favorisere Kunstgødningen. Dette Forhold skal senere omtales lidt nærmere; her skal blot straks anføres, at 0.45 synes rimelig.

I Fig. 1 er den til Ligning (12) svarende Kurve tegnet. Det vil ses, at Kurven forløber paa

lignende Maade som Mitscherlichs Kurve, og at Konstanten  $a$  har samme Betydning som den tilvarende Konstant i Mitscherlichs Ligning. Konstanten  $a$  er det Merudbytte, man opnaar ved en uendelig stor Gødningstilførsel.

Som bekendt volder Konstantberegningen en Del Vanskeligheder, naar man har overkomplette Værdipaar, d. v. s. flere Værdipaar af  $t$  og  $v$ , end der kræves til Konstantberegningen. Saadanne Tilfælde foreligger ofte ved Karforsøg, hvor man desuden ikke altid har Gødningstilførsler, der er ækvidistante og tillader en direkte Beregning af Konstanterne til Mitscherlichs Ligning.

I saadanne Tilfælde er Ligningen (4) særdeles bekvem at have med at gøre, idet Konstanterne  $a$  og  $b$  let kan bestemmes grafisk, en Fremgangsmaade, der ogsaa ofte med Fordel kan anvendes, hvor man kun har de fornødne 2 Værdipaar.

Ligningen

$$v = \frac{at}{b+t} \quad (4) \text{ kan ogsaa skrives}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{b+t}{at} \quad \text{eller}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{t} + \frac{1}{a} \quad (18).$$

Men (18) er Ligningen for en ret Linie. Afsætter man derfor paa et Stykke Millimeterpapir  $\frac{1}{t}$  ad Abscisseaksen og  $\frac{1}{v}$  ad Ordinataksen, vil de erhholdte Punkter, saafremt Forsøgsresultaterne nøjagtigt følger (4), ligge paa en ret Linie, der skærer Ordinataksen i Højden  $\frac{1}{a}$ .

Fremgangsmaaden skal illustreres ved Hjælp af de foran anførte Tal for Merudbytte efter de to forskellige Kunstgødningsmængder ved Aarslev. Man har her:

| $t$           | $v$  | $\frac{1}{t}$ | $\frac{1}{v}$ |
|---------------|------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{2}$ | 1116 | 2             | 0.00089606    |
| 1             | 1552 | 1             | 0.00064453    |

De reciprokke Værdier kan tages i f. Eks. Barlows tables (1), hvorved Udregningen undgaas.

Tegnes nu de reciprokke Værdier ind i et Koordinatsystem, faar man en ret Linie (Fig. 2), der skærer Ordinataksen i Punktet  $0.00039 = \frac{1}{a}$ . Konstanten  $a$  er da  $1 : 0.00039 = 2564.1$ .

$$\frac{1}{v} = 10^{-4} \times$$

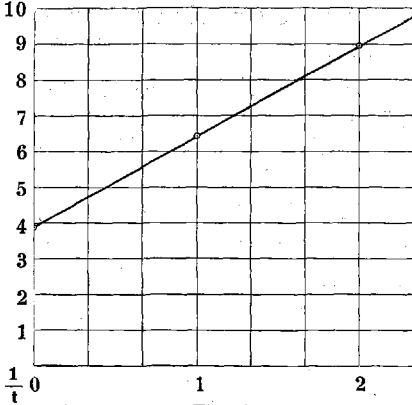


Fig. 2.

Naar som her de reci-  
prokke  $t$  Værdier forholder sig  
som  $1:2$ , kan  $\frac{1}{a}$  findes nøj-  
agtigere ved at subtrahere For-  
skellen  $\frac{1}{v_1} \div \frac{1}{v_2}$  fra  $\frac{1}{v_1}$ , altsaa:

$$\frac{1}{v^1} = 0.00089606$$

$$\div \frac{1}{v_2} = 0.00064433$$

$$\hline 0.00025173$$

$$\frac{1}{a} = 0.00089260 \quad a = 2547.1,$$

hvilken Værdi passer fuldstæn-  
dig med den efter (9) beregnede.

Konstanden  $b$  findes let af de reciprokke Værdier, idet  
man har:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{v_1} \div \frac{1}{v_2}}{\frac{1}{t_1} \div \frac{1}{t_2}} \quad (19).$$

Da  $\frac{1}{t_1} \div \frac{1}{t_2}$  i Eksemplet er lig 1, faas:

$$\frac{b}{a} = 0.00025173$$

$$b = 0.00025173 \cdot 2564.1 = 0.645.$$

Man har da Ligningen:

$$v = \frac{2564.1 \cdot t}{0.645 + t}$$

der ikke er meget forskellig fra (14), hvor Konstanterne bereg-  
nedes direkte.

Har man flere end de nødvendige Punkter, vil disse i Al-  
mindelighed ikke ligge nøjagtig paa en ret Linie. Man tegner  
da den rette Linie, der passer bedst muligt til de givne Punk-  
ter. Liniens Skæring med Abscisseaksen giver altid  $\frac{1}{a}$ , og  $\frac{b}{a}$  kan  
man paa Millimeterpapiret tælle sig til, idet  $\frac{b}{a}$  er den Stigning  
(Forøgelse af  $\frac{1}{v}$ ), som man faar for en vilkaarlig valgt Stræk-  
ning paa Abscisseaksen.

Anvendes denne Fremgangsmaade paa Merudbyttetallene  
fra de 3 Staldgødningsmængder, faar man:

| $t$            | $v$  | $\frac{1}{t}$ | $\frac{1}{v}$ |
|----------------|------|---------------|---------------|
| $\frac{1}{2}$  | 734  | 2             | 0.001362      |
| 1              | 1162 | 1             | 0.000861      |
| $1\frac{1}{2}$ | 1457 | 0.67          | 0.000686      |

Tegnes Værdierne for  $\frac{1}{v}$  og  $\frac{1}{t}$  ind paa Millimeterpapir (Fig. 3) og vælges 1 paa Abscisseaksen lig 90 mm, 0.001 paa Ordinaten lig 100 mm, kan man let aflæse  $\frac{1}{a} = 0.000350$ ;  $a = 2857$ . For  $\frac{1}{t}$  findes  $\frac{1}{v_1}$  til 0.001375. Idet  $\frac{1}{t} = 2$ , er Stigningen paa dette Stykke  $0.001375 \div 0.000350 = 0.001025$  og  $\frac{b}{a} = 0.0005125$  eller  $b = 0.0005125 \times 2857 = 1.46$ . Ligningen lyder da:

$$\frac{1}{v} = 10^{-4} \times$$

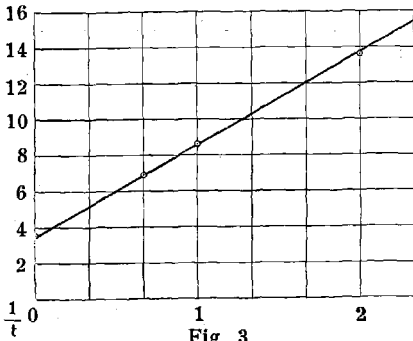


Fig. 3.

$$v = \frac{2857 \cdot t}{1.46 + t}$$

Indsættes  $t = \frac{1}{2}$ , 1 og  $1\frac{1}{2}$ , faas:

|                   |      |                |
|-------------------|------|----------------|
| $t = \frac{1}{2}$ | 1    | $1\frac{1}{2}$ |
| $v = 729$         | 1161 | 1448           |

Forskellen mellem de fundne og beregnede  $v$ -Værdier er kun lille.

Drejer det sig om Sammenligning mellem 2 Gødninger, I og II, og forstaar

man ved Erstatningstallene for de 2 Gødninger de Mængder, der giver samme Udbytte (og derved samme Merudbytte), har man som bekendt, hvis Forsøgene er anstillet med aftrappede Mængder og beregnes efter Mitscherlichs Ligning, at Erstatningstallene,  $E$ , for de to Gødninger er bestemt af Ligningen:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{k_2}{k_1} \quad (20),$$

hvor  $E_1$  og  $E_2$  betyder de Gødningsmængder, der giver samme Merudbytte,  $k_1$  og  $k_2$  er de to Virkningsfaktorer.

Som bekendt gælder dette konstante Erstatningsforhold for 2 Gødninger kun, hvis de to Ligninger, der gengiver Sammenhængen mellem  $v$  og  $t$  har samme Værdi for Konstanten  $a$ , d. v. s., hvis man har Ligningerne:

$$\text{For Gødning I } \log(a \div v) = \log a \div k_1 t$$

$$\text{» II } \log(a \div v) = \log a \div k_2 t$$

Kan Forsøgsresultaterne ikke gengives ved 2 Ligninger med samme  $a$ -Værdi, eksisterer der ikke et konstant, af den anvendte Gødningsmængde uafhængigt Erstatningsforhold.

Hvis Forsøg med aftrappede Mængder af 2 forskellige Gødninger kan gengives ved 2 Ligninger af Formen (4) med samme  $a$ -Værdier, altsaa

$$\begin{aligned} \text{for Gødning I } v &= \frac{at}{b_1 + t} \\ \text{» » II } v &= \frac{at}{b_2 + t} \end{aligned}$$

gælder det ogsaa her, at der findes et konstant Ombytningsforhold:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (21).$$

Samme Merudbytte vil man altsaa faa efter 2 forskellige Mængder af Gødning I og Gødning II. Man har altsaa:

$$\begin{aligned} v &= \frac{at_1}{b_1 + t_1} \\ v &= \frac{at_2}{b_2 + t_2} \\ \frac{at_1}{b_1 + t_1} &= \frac{at_2}{b_2 + t_2} & \frac{t_1}{b_1 + t_1} &= \frac{t_2}{b_2 + t_2} \\ \frac{t_1}{t_2} &= \frac{b_1 + t_1}{b_2 + t_2} = \frac{b_1}{b_2}. \end{aligned}$$

$\frac{t_1}{t_2}$  er Forholdet mellem de Gødningsmængder, der giver samme Merudbytte, er altsaa  $\frac{E_1}{E_2}$ .

Ligning (4) fører altsaa paa samme Betingelser som Mitscherlichs Ligning til et konstant Erstatningstal for to Gødninger.

Søger man ved de anførte Tal fra Aarslevforsøgene efter Erstatningstallene for Staldgødning og Kunstgødning, møder man det Forhold, at a er lavere for Kunstgødning end for Staldgødning. Der er altsaa intet konstant Erstatningstal. Gennemgaar man de Gødningsforsøg, hvor Staldgødning er sammenlignet med Kunstgødning, gaar det som en rød Traad gennem alle disse Forsøg, at der intet konstant Erstatningstal findes. Overalt viser det sig, at Erstatningstallet er afhængig af Mængden og saaledes, at ved smaa Gødningsmængder skal der lidt Kunstgødning til at erstatte en vis Staldgødningsmængde, ved større Gødningsmængder mere. Forholdet træder svagt, men dog tydeligt frem hos Runkelroer og er særlig grelt ved Kartoffler, hvor i Studsgaardsforsøgene 0.5 Staldgødning kan erstattes af 0.42 Kunstg., medens der kræves 1.50 Kunstgødning til at erstatte 1.34 Staldg. Ved Aarslev er Erstatningstallet for Staldgødning rundt regnet 0.55, og det Erstatningstal, 0.45, der foran udleledes af de efter (4) beregnede f-Værdier, altsaa en tilført Mængde paa 0, er derfor ikke urimeligt.



$$\frac{1}{v} = 10^{-3} \times$$

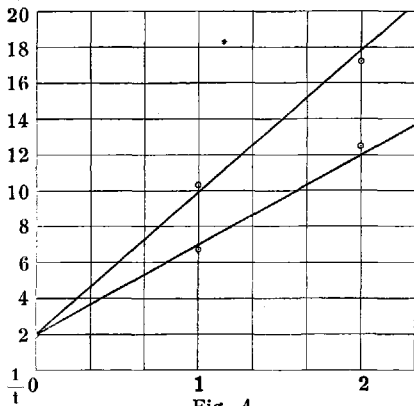


Fig. 4.

Vil man — trods alt — søge et enkelt Erstatnings-tal, byder Ligning (4) den letteste Adgang til at finde den bedst mulige Værdi herfor, idet man da benytter (18) og tegner de 2 rette Linier saaledes, at de skærer Ordinataksen i samme Punkt og samtidig tilpasses bedst muligt til de andre Punkter. Forholdet mellem b-Værdierne giver da det bedste Udtryk for Erstatningstallet. Fremgangsmaaden skal belyses ved

Tal fra Forsøg til Sammenligning mellem forskellige Kvælstofgødninger (2), hvor man fandt, ved Sammenligning af Chilesalpeter og Kalksalpeter til Runkelroer, følgende Merudbyttetal i hkg pr. ha:

|                | Chilesalpeter | Kalksalpeter |
|----------------|---------------|--------------|
| 30 kg N pr. ha | 80            | 58           |
| 60 » » » »     | 149           | 97           |

Idet de anvendte Gødningsmængder forholder sig som 1:2, kan den foran Side 830 anførte Beregningsmaade anvendes, og man finder:

| Chilesalpeter          |                             | Kalksalpeter           |                             |
|------------------------|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|
| $\frac{1}{v_1} =$      | 0.012500                    | $\frac{1}{v_1} =$      | 0.017241                    |
| $\div \frac{1}{v_2} =$ | $\frac{0.006711}{0.005789}$ | $\div \frac{1}{v_2} =$ | $\frac{0.010309}{0.006932}$ |
| $\frac{1}{a} =$        | 0.000922                    | $\frac{1}{a} =$        | 0.003377                    |
| $a =$                  | 1085.8                      | $a =$                  | 296.1                       |

Man finder saaledes hurtigt, at noget konstant Erstatningstal kan der ikke være Tale om, naar a-Værdierne er saa forskellige.

Ved at tegne de reciprokke Værdier ind paa Millimeterpapir, vil man let kunne trække 2 rette Linier, der gaar nogenlunde i Nærheden af de indtegnede Punkter, og begge skærer Ordinataksen i Punktet 0.002, d. v. s.  $a = 500$ .

For  $b_c$  finder man, idet 30 kg N sættes lig  $1/2$  N, Værdien, 2.50 og for  $b_{Ks}$  3.95.

Erstatningsforholdet er da  $3.95 : 2.50 = 1.58$ , mod det i den nævnte Beretning paa anden Maade beregnede 1.49.

De til Ligningerne

$$v = \frac{500 t}{2.50 + t} \text{ og } v = \frac{500 t}{3.95 + t}$$

svarende Merudbyttetal findes, idet  $t$  sættes lig  $1/2$  og 1, til

| $t$   | Chilesalpeter | Kalksalpeter |
|-------|---------------|--------------|
| $1/2$ | 83            | 56           |
| 1     | 143           | 101          |

Afvigelserne mellem de til et Erstatningstal paa 1.58 svarende Merudbyttetal og de fundne Merudbyttetal maa bedømmes ud fra, at Arbejdsfejlen paa de fundne Merudbyttetal udgør ca. 4 hkg.

I Ligningen

$$v = \frac{at}{b + t}$$

har man da en Ligning, der ved de i Praxis forekommende Gødningsmængder paa ret tilfredsstillende Maade beskriver Forholdet mellem Merudbytte og tilført Gødningsmængde, paa enkel Maade kan udtrykke det »konstante« Erstatningstal for to Gødninger og som giver lettere Beregninger end den hidtil fortrinsvis anvendte Mitscherlichs Ligning, som den ellers i mange Henseender ligner.

#### Litteratur.

1. *Barlows tables*. 3. Udgave. London 1930.
2. *L. Rasmussen*: Beretning om Forsøg med forskellige Kvælstofgødninger. Sjællandske Planteavlsberetning 1933. S. 161 og følg.