

Bestemmelse af Middelfejlen ved Hjælp af Differensdannelser.

Af R. K. Kristensen.

Forsøgsresultater kan paa flere Maader være behæftede med baade ensidige og tilfældige Afvigelser, og det er ofte nødvendigt at kunne udskille de første og fremstille et Udtryk for de sidste. Dette kan f. Eks. være Tilfældet ved forsøgstekniske Undersøgelser, der gaar ud paa at sammenligne forskellige Parcellfordelinger ved Hjælp af Afgrødetal fra en Mark, hvor alle Parceller er behandlet og tilsaaet ens. Danner man Differenser mellem Afgrødetal fra Naboparceller, vil disse Differenser overvejende være et Udtryk for tilfældige Svingninger i Afgrødens Størrelse; men hvis der er en stærk ensidig Frugtbarehedsvariation til Stede, vil en ret betydelig Del af denne dog gaa med i Udtrykket for den tilfældige Variation. Dette kan forhindres ved en fornyet Differensdannelse, som det skal vises i det følgende.

Fig. 1. Afgrødetal.

178	186	177	194	213	251	228	238	248
179	189	200	205	220	238	238	233	243
154	159	170	173	187	212	229	228	245
182	184	195	200	203	215	224	229	230
171	173	191	183	174	198	187	204	196
166	165	188	189	182	203	196	201	208
177	180	189	191	195	188	189	201	185
160	176	175	182	188	190	193	200	208
200	202	200	199	200	200	214	205	218

Afgrøderne af 9×9 ens behandlede Parceller fra en Prøvedyrkning paa Askov Forsøgsstation (se Tidsskrift for Planteavl, 31. Bind, Side 467) er opførte i Fig. 1.

Dannes Differenser paa langs ad de vandrette Rækker ($178 \div 186$, $186 \div 177$ o. s. v.), fremkommer Tallene i Fig. 2.

Fig. 2. Første Sæt Differenser, d_1 .

— 8	9	—17	—19	—38	23	—10	—10
—10	—11	— 5	—15	—18	0	5	—10
— 5	—11	— 3	—14	—25	—17	1	—17
— 2	—11	— 5	— 3	—12	— 9	— 5	— 1
— 2	—18	8	9	—24	11	—17	8
1	—23	— 1	7	—21	7	— 5	— 7
— 3	— 9	— 2	— 4	7	— 1	—12	16
—16	1	— 7	— 6	— 2	— 3	— 7	— 8
— 2	2	1	— 1	0	—14	9	—13

Mellem disse Differenser dannes atter Differenser, idet man nu følger de lodrette Rækker (Fig. 3).

Tallene i Fig. 1 viser en stærk ensidig Variation, idet Afgrødernes Størrelse tiltager fra venstre til højre. Første Sæt Differenser er endnu præget af denne Variation, Tallene er overvejende negative. I det næste Sæt Differenser er den ensidige Variation forsvunden, positive og negative Differenser ligger nu fordelt tilfældig mellem hverandre. Antallet af positive og negative Differenser (samt Nul-Differenser) er:

		+	÷	0
1. Sæt Differenser, d_1		17	53	2
2. » » d_2		30	30	4

Beregnes Middelfejlen af de 72 Differenser d_1 fra 1. Differensdannelse, faas:

$$m^2 = \frac{[d_1^2]}{2 \times 72} = \frac{10004}{144} = 69.47, m = 8.33.$$

Fig. 3. Andet Sæt Differenser, d_2 .

2	20	-12	-4	-20	23	-15	0
-5	0	-2	-1	7	17	4	7
-3	0	2	-11	-13	-8	6	-16
0	7	-13	-12	12	-20	12	-9
-3	5	9	2	-3	4	-12	15
4	-14	1	11	-28	8	7	-23
13	-10	5	2	9	2	-5	24
-14	-1	-8	-5	-2	11	-16	5

Ved 2. Differensdannelse er der 64 Differenser d_2 , og Middelfejlen bliver:

$$m^2 = \frac{[d_2^2]}{4 \times 64} = \frac{7890}{256} = 30.82, m = 5.55.$$

Den bedre Bortskaffelse af de ensidige Afvigelser har saaledes bragt Middelfejlen ned fra 8.33 til 5.55. Beregnes Middelfejlen af selve Afrødetallene, bliver den et Udtryk for baade tilfældige og ensidige Afvigelser:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{81 \div 1} = \frac{39217}{80} = 490.21, m = 22.14.$$

Den beskrevne Fremgangsmaade kan anvendes baade ved Planteavls- og Husdyrbrugsforsøg. Ønsker man f. Eks. at kende Middelfejlen ved en Række gentagne Vejninger af voksende Dyr, kan man først danne Differenser for de enkelte Dyr ved Hjælp af Vægttallene fra første og anden Vejning, anden og tredje Vejning o. s. fr., og derefter fremstille det næste Sæt Differenser ved at sammenligne de korresponderende Differenser fra Dyr til Dyr. Er der ensidige Afvigelser, f. Eks. paa Grund af en noget forskellig Begyndelsesvægt, kan Dyrene ordnes efter tiltagende (eller aftagende) Begyndelsesvægt, og de

ensidige Variationer vil da — ligesom Afrødetallene fra en prøvedyrket Mark — være præget af en vis Regelmæssighed.

Til Forklaring af de benyttede Middelfejlsformler anføres et lille Eksempel med 4×5 Elementer. Da vi regner med, at de ensidige Afvigelser (og de egentlige, fejlfri Observationsresultater) er elimineret ved de to Differensdannelser, saa at det sidste Sæt Differenser alene repræsenterer Observationsresultaternes tilfældige Fejl, er det tilstrækkeligt at betragte disse, som betegnes med a, b, t:

a	b	c	d	e
f	g	h	i	j
k	l	m	n	o
p	q	r	s	t

1. Sæt Differenser (d_1) er:

$a \div b$	$b \div c$	$c \div d$	$d \div e$
$f \div g$	$g \div h$	$h \div i$	$i \div j$
$k \div l$	$l \div m$	$m \div n$	$n \div o$
$p \div q$	$q \div r$	$r \div s$	$s \div t$

og 2. Sæt Differenser (d_2):

$$a \div b \div f + g \quad b \div c \div g + h \quad c \div d \div h + i \quad \text{o. s. v.}$$

Ved Kvadrering af den første Differens d_2 faas:

$$a^2 + b^2 + f^2 + g^2 \div 2ab \div 2af + 2ag + 2bf \div 2bg \div 2fg.$$

Da Dobbeltprodukterne kan være positive eller negative med lige stor Sandsynlighed ifølge Definitionen af tilfældige Fejl, sættes deres Sum lig Nul, og samtlige Differenskvadrater bliver da:

$$\begin{array}{llll} a^2 + b^2 + f^2 + g^2 & b^2 + c^2 + g^2 + h^2 & c^2 + d^2 + h^2 + i^2 & d^2 + e^2 + i^2 + j^2 \\ f^2 + g^2 + k^2 + l^2 & g^2 + h^2 + l^2 + m^2 & h^2 + i^2 + m^2 + n^2 & i^2 + j^2 + n^2 + o^2 \\ k^2 + l^2 + p^2 + q^2 & l^2 + m^2 + q^2 + r^2 & m^2 + n^2 + r^2 + s^2 & n^2 + o^2 + s^2 + t^2 \end{array}$$

Da hvert Differenskvadrat er Summen af 4 Fejlkvadrater, vil vi sætte $D_2^2 = 4 m^2$ eller $m^2 = \frac{D_2^2}{4}$, hvor D_2^2 er Differenskvadraternes Middelværdi, medens m^2 er et tilnærmet Udtryk for Fejlkvadraternes Middelværdi eller Middelfejlens Kvadrat¹⁾. I Eksemplet med de 4×5 Elementer og 3×4 Differenser d_2 faar man

¹⁾ Beregnes Middelfejlen af 1. Sæt Differenser, faas $m^2 = \frac{D_1^2}{2}$, hvor D_1^2 er Middelværdien af d_1^2 .

$$m^2 = \frac{[d_2^2]}{4 \times 12}.$$

Som det ses, faar de 20 Fejlstørrelser ikke lige stor Indflydelse paa Middelfejlen. I de 4×12 Fejlkvadrater, der tilsammen udgør $[d_2^2]$, er de 4 Hjørneelementer (med Fejlstørrelserne a — e — p — t) kun repræsenteret hver een Gang, de øvrige Randelementer hver 2 Gange, Resten 4 Gange. Dette faar — da Fejlstørrelserne er fordelt tilfældig — ingen systematisk eller ensidig Indflydelse paa Resultatet af Fejlberegningen, men det gør denne mere usikker; den bør derfor hvile paa et rigelig stort Antal Elementer — ogsaa fordi, en saadan indirekte Bestemmelse af Middelfejlen ved Hjælp af Differenser i sig selv er mere usikker end en direkte Bestemmelse.