

Udjævning af Forsøgsresultater ved Hjælp af Differensdannelser.

Af N. P. Johansen.

Med den Udvikling, vort Forsøgsvæsen er undergaaet, og med den Finhed, der nu baade kræves og præsteres af vore Markforsøg, er den tal-mæssige Behandling af Forsøgsresultaterne blevet en Sag af stadig voksende Betydning. Samtidig med, at Markforsøgenes Teknik udvikles til den størst mulige Fuldkommenhed, er det nødvendigt, at man bliver i Stand til at uddrage de bedst mulige Talværdier af de tilvejebragte Forsøgsresultater, og Bestræbelserne maa da navnlig gaa ud paa at ophæve Virkningen af systematiske Variationer i Forsøgsmarkens Frugtbarhed og udskille de ensidige Afvigelser, som saadanne Variationer behæfter Afgrødetallene med, gennem passende Udjævningsmetoder og samtidig gennemføre en Fejlberægning, der kan give Oplysning om, hvor stor Sikkerhed man kan tillægge de fundne Resultater. Anvendelse af den universelle Udjævningsmetode, som kaldes de mindste Kvadraters Metode, vil støde paa Vanskeligheder, fordi de ensidige Variationer ofte vil være af en meget sammensat Natur og kræve betydelige matematiske Forudsætninger ved Behandlingen. En tilfredsstillende Udjævning kan imidlertid gennemføres ved simple Fremgangsmaader, der ikke kræver særlige matematiske Hjælpemidler, men den efterfølgende Fejlberægning bliver da af en mere sammensat Natur; den almindelige Fejlteori slaar ikke til, og der maa udarbejdes specielle Formler — eksakte Formler eller Tilnærmelsesformler — til Beregning af Middelfejlen. Dette Problem er behandlet i efterfølgende Afhandling af Oberst N. P. Johansen, tidligere Chef for Generalstabens topografiske Afdeling. Det foran staaende Arbejde, der handler om Bestemmelse af Middelfejlen ved forskellige Parcellfordelinger, var Udgangspunkt, men det ene Spørgsmaal affødte det andet, og de blev da behandlede i den Rækkefølge, hvori de fremstod. Denne naturlige Udviklingsgang er bibeholdt i Afhandlingen, der er blevet til under jævnlige Konferencer mellem Forfatteren og undertegnede, idet jeg benyttede den gunstige Lejlighed til at faa disse vanskelige Spørgsmaal tagne under Behandling fra særlig kompetent Side. Den Udjævning ved Hjælp af Differensdannelser, som jeg anvendte ved Behandlingen af det femdelte Forsøg i »Anlæg og Opgørelse af Markforsøg« (Tidsskrift for Planteavl, 31. Bind), er ført videre, og en speciel Middelfejlsformel, der dækker de fortsatte Differensdannelser, er fremstillet. Metodens særlige Natur er klarlagt og den tilhørende Fejlberægnings Forhold til den almindelige Fejlteori belyst. Denne Udjævningsmaade er vel ikke saa omfattende som de mindste Kvadraters

Metode, men inden for sit begrænsede Omraade gør den udmærket Fyldest. Med denne Metode som Grundlag kan man ved en rent elementær Talbehandling uddrage saa gode Værdier af de fundne Forsøgsresultater, at de næppe kan findes synderlig bedre ved mere indviklede Metoder, og gennemføre en efter Omstændighederne helt eller tilstrækkelig korrekt Fejlberregning. Betydningen heraf er givet.

R. K. Kristensen.

Ved de i Tidsskrift for Planteavl, 28. Bind, Side 122—127, beskrevne Undersøgelser gik vi ud fra, at der forelaa p forskellige Forsøgsled, hvert med r Gentagelser, og der blev dannet Middeltal paa to Maader — med henholdsvis p og r Elementer i hver Gruppe. Vil man foretage 3 Sammendragninger af Observationsstørrelserne (Forsøgsresultaterne), maa man sætte $p = r$ (i det følgende betegnes dette Antal med n), da der kun under denne Forudsætning lader sig opstille Formler med almindelig Gyldighed.

Det forudsættes altsaa, at der foreligger n^2 Observationer, omfattende n forskellige Størrelser, der hver er observeret n Gange (n Forsøgsled med n Fællesparceller). De n^2 Observationsstørrelser er sammenstillede i nedenstaaende Tableau, hvor Opstillingen antages at være en saadan, at hvert Forsøgsled forekommer een Gang i hver Søjle og een Gang i hver Række. Observationsstørrelserne er behæftede med systematiske og med tilfældige Fejl, og den Behandling, Observationsmaterialet underkastes, har til Formaal i størst mulig Grad at udskille de systematiske Fejl og at gøre Rede for Gennemsnitsvirkningen af de tilfældige Fejl.

$O_{1,1}$	$O_{2,1}$		$O_{p,1}$		$O_{n,1}$
$O_{1,2}$	$O_{2,2}$		$O_{p,2}$		$O_{n,2}$
$O_{1,3}$	$O_{2,3}$		$O_{p,3}$		$O_{n,3}$
...	...		...		...
$O_{1,q}$	$O_{2,q}$		$O_{p,q}$		$O_{n,q}$
...	...		...		...
$O_{1,n}$	$O_{2,n}$		$O_{p,n}$		$O_{n,n}$

Den Behandling, hvis Virkninger med Hensyn til Ophobningen af de tilfældige Fejl, vi her skal undersøge, bestaar i følgende Operationer:

1. De i hver enkelt Søjle staaende Observationsstørrelser sammendrages til et Middeltal S, altsaa for den p. Søjle:

$$S_p = \frac{o_{p,1} + o_{p,2} + \dots + o_{p,n}}{n}, \quad (1)$$

og dette Middeltal trækkes fra hvert enkelt af Søjle's Elementer. De herved dannede Differenser, a, hvis almindelige Form er

$$a_{p,q} = o_{p,q} - \frac{o_{p,1} + o_{p,2} + \dots + o_{p,n}}{n}, \quad (2)$$

skrives ned paa samme Maade og i samme Rækkefølge som Observationerne o, altsaa som nedenstaaende Tableau:

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$		$a_{p,1}$		$a_{n,1}$
$a_{1,2}$	$a_{2,2}$		$a_{p,2}$		$a_{n,2}$
$a_{1,3}$	$a_{2,3}$		$a_{p,3}$		$a_{n,3}$
...	...		...		...
$a_{1,q}$	$a_{2,q}$		$a_{p,q}$		$a_{n,q}$
...	...		...		...
$a_{1,n}$	$a_{2,n}$		$a_{p,n}$		$a_{n,n}$

Til hver af Differenserne a kan lægges en vilkaarlig valgt Funktion af Observationerne, $F(o_{1,1}, o_{1,2} \dots o_{n,n})$, (f. Eks. Markens Gennemsnitsafgrøde). Dennes Indvirkning paa Fejldannelsen bliver dog af rent lokal Natur, thi ved fortsat Dannelse af Middeltal og Differenser i Lighed med, hvad der er sket ved Udformningen af Størrelserne a, gaar Funktionen ud. Da den saaledes bliver uden Indflydelse paa de følgende Betragtninger, udelades den helt.

2. Dernæst dannes Middeltal af de i hver enkelt Række staaende Størrelser a, og dette Middeltal trækkes fra hvert enkelt af Rækkens Elementer. Herved fremkommer n^2 ny Differenser, b, der nedskrives i et Tableau ganske som Størrelserne a. Til hver af Differenserne b kan lægges en vilkaarlig valgt Funktion af Observationsstørrelserne, $f(o_{1,1}, o_{1,2} \dots o_{n,n})$, men da denne ligesom den tidligere omtalte $F(o_{1,1}, o_{1,2} \dots o_{n,n})$ kun faar rent lokal Indflydelse paa Fejlstørrelserne, udelades den.

Den almindelige Form for en Differens b er

$$b_{p,q} = a_{p,q} - \frac{a_{1,q} + a_{2,q} + \dots + a_{n,q}}{n}$$

eller, naar Værdierne for a i Henhold til Ligning 2 indsættes,

$$b_{p,q} = o_{p,q} \div \frac{o_{p,1} + o_{p,2} + \dots + o_{p,n}}{n} \div \frac{o_{1,q} + o_{2,q} + \dots + o_{n,q}}{n} + \frac{[o]}{n^2}, \quad (3)$$

hvor $[o]$ betegner Summen af samtlige Observationsstørrelser.

En vilkaarlig valgt Observationsstørrelse $o_{p,q}$ er sammensat af 3 Elementer, nemlig

1. Størrelsens sande Værdi $O_{p,q}$, som man vilde have faaet, hvis der slet ingen Fejl var,
2. et Fejlelement $\delta_{p,q}$, hidrørende fra den systematiske Fejlindflydelse, og
3. en tilfældig Fejl $\epsilon_{p,q}$.

Man har altsaa

$$o_{p,q} = O_{p,q} + \delta_{p,q} + \epsilon_{p,q}, \quad (4)$$

som indsat i Ligning 3 giver

$$\left. \begin{aligned} b_{p,q} = O_{p,q} \div \frac{o_{p,1} + o_{p,2} + \dots + o_{p,n}}{n} \div \frac{o_{1,q} + o_{2,q} + \dots + o_{n,q}}{n} + \frac{[O]}{n^2} \\ + \delta_{p,q} \div \frac{\delta_{p,1} + \delta_{p,2} + \dots + \delta_{p,n}}{n} \div \frac{\delta_{1,q} + \delta_{2,q} + \dots + \delta_{n,q}}{n} + \frac{[\delta]}{n^2} \\ + \epsilon_{p,q} \div \frac{\epsilon_{p,1} + \epsilon_{p,2} + \dots + \epsilon_{p,n}}{n} \div \frac{\epsilon_{1,q} + \epsilon_{2,q} + \dots + \epsilon_{n,q}}{n} + \frac{[\epsilon]}{n^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Hvis den systematiske Fejlkilde er en rent lineær Skraaplansvirkning, vil de Led i (5), der indeholder δ , tilsammen være lig Nul. Dette er formentlig umiddelbart indlysende, men lader sig for øvrigt meget let matematisk paavise ved Hjælp af Ligningen for den Flade, der repræsenterer Skraaplansvirkningen. I Virkeligheden følger de ensidigt virkende, systematiske Fejl vel nok ikke en saa simpel Lov; men en fuldkommen Bortfjernelse af ensidige Fejl i et Observationsmateriale maa i Almindelighed betragtes som umulig. Paa et eller andet Stadium af Regningen maa man indstille den videre Forfølgning af dem og tage til Takke med den Tilnærmelse, der alt er naaet, idet tilbageværende Rester da maa indgaa i de tilfældige Fejls Gruppe. Dette Stadium betragtes altsaa her som naaet med Dannelsen af Differenserne b.

Ifølge Sagens Natur maa de Størrelser O , der hører til et og samme Forsøgsled, være lige store. Men heraf følger

$$\frac{o_{1,q} + o_{2,q} + \dots + o_{n,q}}{n} = \frac{o_{p,1} + o_{p,2} + \dots + o_{p,n}}{n} = \frac{[O]}{n^2}.$$

Herefter reduceres da Ligning 5 til

$$b_{p,q} = O_{p,q} \div \frac{O_{p,1} + O_{p,2} + \dots + O_{p,n}}{n} + \varepsilon_{p,q} \div \frac{\varepsilon_{p,1} + \varepsilon_{p,2} + \dots + \varepsilon_{p,n}}{n} \div \frac{\varepsilon_{1,q} + \varepsilon_{2,q} + \dots + \varepsilon_{n,q}}{n} + \frac{[\varepsilon]}{n^2} \quad (6)$$

Hvis der ingen tilfældige Fejl ε var, vilde alle til samme Forsøgsled hørende Størrelser b være lige store og hver lig Forskellen mellem Forsøgsresultatets sande Værdi og Middeltallet af de sande Værdier for samtlige Forsøgsled. Tilstedeværelsen af Fejlene ε vil imidlertid medføre smaa Forskelligheder i Værdierne for de til samme Forsøgsled hørende b , og netop herved opstaar Muligheden for en talmæssig Vurdering af de tilfældige Fejls Indflydelse paa de forskellige Størrelser, der kan komme i Betragtning. Sammenholder man derimod 2 Størrelser b , stammende hver fra sit Forsøgsled, saa vil der mellem disse desuden være en Forskel, som skyldes andre Aarsager end Fejlvirksomheden, og saadanne Størrelser maa derfor ikke kombineres sammen, hvor det drejer sig om en ren Undersøgelse af Fejlene.

3. Udtages de til et enkelt Forsøgsled hørende Størrelser b — der ifølge Forudsætningen er placerede med et Element i hver Søjle og hver Række i Tableaue over b 'erne — og sammendrages de til et Middeltal, og trækkes dette Middeltal dernæst fra hvert enkelt af Forsøgsleddets b 'er, saa fremkommer n Differenser c . Gentages det samme med hvert af de øvrige Forsøgsled, faas i alt n^2 Størrelser c . For at fremstille det almindelige Udtryk for en Differens c vil vi forudsætte, at Diagonalrækken fra øverste venstre til nederste højre Hjørne i Tableaue over b 'erne indeholder de til et enkelt Forsøgsled hørende Størrelser b . Denne specielle Placering vælges her alene for at kunne holde Rede paa Indices paa de i Betragtning kommende Størrelser, thi i øvrigt er den almindelige Form for et c ganske upaavirket af Elementernes Placering, naar kun den almindelige Fordring om et Element i hver Søjle og hver Række er opfyldt. For Diagonalrækken har man

$$c_{p,p} = b_{p,p} \div \frac{b_{1,1} + b_{2,2} + \dots + b_{n,n}}{n}$$

eller, naar man heri indsætter Værdierne for b i Henhold til Ligning 6,

$$c_{p,p} = O_{p,p} \div \frac{O_{p,1} + O_{p,2} + \dots + O_{p,n}}{n} \div \frac{O_{1,1} + O_{2,2} + \dots + O_{n,n}}{n} + \frac{[O]}{n^2} \left. \begin{aligned} &+ \varepsilon_{p,p} \div \frac{\varepsilon_{p,1} + \varepsilon_{p,2} + \dots + \varepsilon_{p,n}}{n} \div \frac{\varepsilon_{1,p} + \varepsilon_{2,p} + \dots + \varepsilon_{n,p}}{n} \\ &\div \frac{\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \dots + \varepsilon_{n,n}}{n} + 2 \frac{[\varepsilon]}{n^2} \end{aligned} \right\} (7)$$

Heri er

$$O_{p,p} = \frac{O_{1,1} + O_{2,2} + \dots + O_{n,n}}{n}$$

og

$$\frac{O_{p,1} + O_{p,2} + \dots + O_{p,n}}{n} = \frac{[O]}{n^2},$$

hvorfor de Led i (7), der indeholder O , tilsammen bliver lig Nul. Man har derfor

$$c_{p,p} = \varepsilon_{p,p} \div \frac{\varepsilon_{p,1} + \varepsilon_{p,2} + \dots + \varepsilon_{p,n}}{n} \div \frac{\varepsilon_{1,p} + \varepsilon_{2,p} + \dots + \varepsilon_{n,p}}{n} \left. \begin{aligned} &\div \frac{\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \dots + \varepsilon_{n,n}}{n} + 2 \frac{[\varepsilon]}{n^2} \end{aligned} \right\} (8)$$

Størrelserne c er altsaa rene Fejludtryk.

Ordnes højre Side af Ligning 8 m. H. t. ε , faas

$$\begin{aligned} c_{p,p} &= \left(1 \div \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \varepsilon_{p,p} \\ &\div \left(\frac{1}{n} \div \frac{2}{n^2}\right) (\varepsilon_{p,1} + \varepsilon_{p,2} + \dots + \varepsilon_{p,p-1} + \varepsilon_{p,p+1} + \dots + \varepsilon_{p,n}) \\ &\div \left(\frac{1}{n} \div \frac{2}{n^2}\right) (\varepsilon_{1,p} + \varepsilon_{2,p} + \dots + \varepsilon_{(p-1),p} + \varepsilon_{(p+1),p} + \dots + \varepsilon_{n,p}) \\ &\div \left(\frac{1}{n} \div \frac{2}{n^2}\right) (\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \dots + \varepsilon_{(p-1),(p-1)} + \varepsilon_{(p+1),(p+1)} + \dots + \varepsilon_{n,n}) \\ &+ \frac{2}{n^2} (\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3} + \dots + (n^2 \div 1 \div 3 (n \div 1)) \text{ Addender}). \end{aligned}$$

Betegnes Middelværdien af Kvadraterne af Størrelserne c ved $\{cc\}$, medens m^2 er Middelværdien af Kvadraterne af ε , saa faas nu af ovenstaaende Ligning

$$\{cc\} = m^2 \left[\left(1 \div \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)^2 + 3 (n \div 1) \left(\frac{1}{n} \div \frac{2}{n^2}\right)^2 + (n^2 \div 1 \div 3 (n \div 1)) \frac{4}{n^4} \right]$$

eller efter Sammendragning af højre Side

$$\{cc\} = \frac{(n \div 1)(n \div 2)}{n^2} m^2. \quad (9)$$

Middelværdien $\{cc\}$ er her at forstaa som den Værdi, man vilde faa, hvis man af det foreliggende Observationsmateriale kun beregnede en eneste Størrelse c — i øvrigt ligegyldigt hvilken —, gjorde dernæst det hele Dyrkningsforsøg om igen under samme Hovedbetingelser og beregnede den samme Størrelse c af det ny Observationsmateriale, gjorde atter Forsøget om en 3., 4. o. s. v. Gang, i alt uendelig mange Gange. De saaledes tilvejebragte uendelig mange indbyrdes uafhængige Værdier for c kvadreres, lægges sammen og divideres med deres Antal; Resultatet er da den sande Middelværdi $\{cc\}$, og det er den, der indgaar i (9). Men i Praksis er en saadan Fremgangsmaade selvfølgelig udelukket. Her maa man nøjes med af det foreliggende ene Sæt Observationsmateriale at fremstille saa mange Værdier af c som muligt og saa benytte Middeltallet af deres Kvadrater som Udtryk for $\{cc\}$. I det foreliggende Tilfælde maa vi altsaa sætte

$$\{cc\} = \frac{[c^2]}{n^2},$$

som indsat i (9) giver

$$\frac{[c^2]}{n^2} = \frac{(n \div 1)(n \div 2)}{n^2} m^2$$

og deraf

$$m^2 = \frac{[c^2]}{(n \div 1)(n \div 2)}. \quad (10)$$

Størrelserne c maa ikke opfattes som Fejlene paa Størrelserne b , selv om Forskellen i Realiteten ikke er ret stor. Som det fremgaar af en Sammenligning mellem Formlerne 6 og 8, er den rent teoretiske Forbindelse mellem b og c af mere sammensat Natur, hvilket hidrører fra det Afhængighedsforhold, der allerede findes mellem Størrelserne b indbyrdes. Hvis man kunde betragte c som værende Fejlen paa b , vilde Middelfejlkvadratet m_b^2 paa b være udtrykt ved

$$m_b^2 = \frac{[c^2]}{n(n \div 1)}.$$

Nu er b afledet af a ved et Udtryk af Formen

$$b = \frac{(n \div 1) a_1 \div a_2 \div a_3 \div \dots \div a_n}{n}$$

og a afledet af o paa tilsvarende Maade:

$$a = \frac{(n \div 1) o_1 \div o_2 \div o_3 \div \dots \div o_n}{n}$$

Naar m_a er Middelfejlen paa a , vilde man da have

$$m_b^2 = \frac{n \div 1}{n} m_a^2 \text{ og } m_a^2 = \frac{n \div 1}{n} m^2,$$

og ved at kombinere disse 3 Udtryk med hverandre faas

$$m^2 = \frac{[c^2]}{n^2} \left(\frac{n}{n \div 1} \right)^3.$$

Denne Formel er altsaa ikke matematisk berettiget, men de Værdier, den giver, ligger dog meget nær op ad dem, man faar ved Benyttelsen af den teoretisk rigtige Formel 10. Forskellen, der udgør $m^2 \frac{1}{n(n \div 2)}$, betyder saa meget mindre, som Grundlaget for Fejlberegningen, nemlig Størrelsen $\frac{[c^2]}{n^2}$, selv kun rummer ret ringe Nøjagtighed. Skulde særlige Omstændigheder opfordre til at benytte Formlen $m^2 = \frac{[c^2]}{n^2} \left(\frac{n}{n \div 1} \right)^3$ i Stedet for $m^2 = \frac{[c^2]}{(n \div 1)(n \div 2)}$, kan der følgelig ikke rejses vægtige Indvendinger derimod.

Vi skal dernæst undersøge, om der kan fremstilles en almengyldig Formel til Beregning af Middelfejlen paa de observerede Størrelser o , naar man fortsætter med Sammen dragningerne og Differensdannelserne i Grupper med n Elementer i hver og saaledes, at to Elementer, der een Gang har været i Gruppe sammen, ikke kommer dette mere.

Vi vil betegne de i forrige Afsnit omhandlede Størrelser a som Differenserne af 1. Orden, b som Differenserne af 2. Orden, c som Differenserne af 3. Orden. Differenser af 4., 5. . . . s. Orden vil blive betegnet ved henholdsvis $d_4, d_5 \dots d_s$.

En Differens er almindeligvis sammensat af 3 Bestanddele:

$$d = f(O) + \varphi(\delta) + \psi(\epsilon), \quad (11)$$

af hvilke den ene afhænger alene af de sande Værdier O af Observationerne, den anden af de ensidige Fejl δ og den tredje af de tilfældige Fejl ϵ paa Observationerne. Ved de følgende Undersøgelser er det kun det sidste Led, $\psi(\epsilon)$, der har Interesse. Vi vil betegne dette Led for Differenserne af 1. Orden med v_1 , for Differenserne af 2. Orden med v_2 og saaledes videre,

for Differenserne af s. Orden med v_s , eventuelt med Tilføjelse af et Indeks, f. Eks. $v_{s,pq}$, til at betegne det paagældende Elements Plads i Tableauet.

Den almindelige Form for v_1 afledes umiddelbart af (2) ved i denne at sætte $o = O + \delta + \epsilon$, og for v_2 og v_3 er den givet ved de sidste Led i (5) og (7). Af Hensyn til Overskueligheden af de efterfølgende Beregninger vil det dog være ønskeligt at anvende en forkortet Skrivemaade. Ser vi saaledes paa det i (7) indeholdte Udtryk for v_3 , saa vil det ses, at heri indgaar de 3 Størrelser

$$\frac{\epsilon_{p,1} + \epsilon_{p,2} + \dots + \epsilon_{p,n}}{n}, \quad \frac{\epsilon_{1,p} + \epsilon_{2,p} + \dots + \epsilon_{n,p}}{n}, \quad \frac{\epsilon_{1,1} + \epsilon_{2,2} + \dots + \epsilon_{n,n}}{n}.$$

Tællerne i disse Udtryk er Summerne af Fejlene ϵ for de Grupper, hvori det betragtede Element efterhaanden er indgaaet. Tælleren i det første Udtryk er saaledes Fejlsummen for den Gruppe, der førte til Dannelsen af Differensen af 1. Orden $a_{p,p}$ — beliggende i Diagonalen —, Tælleren i det næste Udtryk Fejlsummen for den Gruppe, der førte til Differensen af 2. Orden $b_{p,p}$ og saaledes videre. Vi vil betegne disse Tællere for et Element, beliggende i den p. Søjle og q. Række, ved henholdsvis

$$\sum_1^{pq} \epsilon, \quad \sum_2^{pq} \epsilon, \quad \dots \quad \sum_s^{pq} \epsilon.$$

Herefter kan da de almindelige Udtryk for v_1 , v_2 og v_3 skrives saaledes:

$$v_{1,pq} = \epsilon_{pq} \div \frac{\sum_1^{pq} \epsilon}{n},$$

$$v_{2,pq} = \epsilon_{pq} \div \frac{\sum_1^{pq} \epsilon}{n} \div \frac{\sum_2^{pq} \epsilon}{n} + \frac{[\epsilon]}{n^2},$$

$$v_{3,pq} = \epsilon_{pq} \div \frac{\sum_1^{pq} \epsilon}{n} \div \frac{\sum_2^{pq} \epsilon}{n} \div \frac{\sum_3^{pq} \epsilon}{n} + 2 \frac{[\epsilon]}{n^2}.$$

Disse Udtryk kan sammenfattes i den almindelige Formel

$$v_{s,pq} = \epsilon_{pq} \div \frac{\sum_1^{pq} \epsilon}{n} \div \frac{\sum_2^{pq} \epsilon}{n} \div \dots \div \frac{\sum_s^{pq} \epsilon}{n} + (s \div 1) \frac{[\epsilon]}{n^2}. \quad (12)$$

Vi skal nu vise, at Formel 12 ikke alene gælder for $s = 1$, 2 eller 3, men er almenlydig, gældende for enhver Værdi af s . Beviset vil blive ført som Induktionsbevis, nemlig ved at paa-vise, at hvis Formlen gælder for een Værdi af s , gælder den ogsaa for den paafølgende.

Størrelserne v_s er de absolutte Fejl paa Differenserne d_s . Det næste Sæt Differenser d_{s+1} dannes af d_s efter den alminde-lige Formel

$$d_{s+1, pq} = d_{s, pq} \div \frac{d_{s, ab} + d_{s, cd} + \dots + d_{s, pq} + \dots (n \text{ Addender}),}{n}$$

og følgelig maa de paa d_{s+1} hvilende absolutte Fejl v_{s+1} have Formen

$$v_{s+1, pq} = v_{s, pq} \div \frac{v_{s, ab} + v_{s, cd} + \dots + v_{s, pq} + \dots (n \text{ Addender}).}{n}$$

Det sidste Led i disse to Udtryk er Gruppemiddeltallet for den Gruppe af Ordenen $s + 1$, hvori Elementet med Indeks pq indgaar. Ved at sammenholde med (12) vil man se, at dette Gruppemiddeltal for Fejlligningens Vedkommende bliver

$$\text{Gruppemiddeltal} = \frac{\sum_{\epsilon}^{pq} \epsilon}{n^{s+1}} \div s \frac{[\epsilon]}{n^2} + (s \div 1) \frac{[\epsilon]}{n^2} = \frac{\sum_{\epsilon}^{pq} \epsilon}{n^{s+1}} \div \frac{[\epsilon]}{n^2},$$

thi ved Dannelsen af Gruppemiddeltallet maa det første Led

i (12) give $\frac{\sum_{\epsilon}^{pq} \epsilon}{n^{s+1}}$, og hvert af de følgende Led af Formen

$\frac{\sum_{\epsilon}^{pq} \epsilon}{n^r}$ maa i Betragtning af, at den ny Gruppe ikke indeholder 2 eller flere Led, der tidligere har været sammen i en Gruppe, give $\frac{[\epsilon]}{n^2}$; endelig bliver det sidste Led i (12) uforandret ved Middeltalsdannelsen. Indsætter man nu i Ligningen for $v_{s+1, pq}$ den fundne Værdi for Gruppemiddeltallet og det ved (12) givne Udtryk for $v_{s, pq}$, faar man

$$v_{s+1, pq} = \epsilon_{pq} \div \frac{\sum_{\epsilon}^{pq} \epsilon}{n^1} \div \frac{\sum_{\epsilon}^{pq} \epsilon}{n^2} \div \dots \div \frac{\sum_{\epsilon}^{pq} \epsilon}{n^{s+1}} + s \frac{[\epsilon]}{n^2}.$$

Men denne Ligning er sammenfaldende med (12), naar man i denne forhøjer s med en Enhed. Hvis derfor (12) er gyldig for een Værdi af s , er den altsaa ogsaa gyldig for $s + 1$. Nu gælder Ligningen for $s = 3$, og ifølge Beviset maa den saa ogsaa gælde for $s = 4$; men gælder den for $s = 4$, maa den ogsaa gælde for $s = 5$ o. s. v., Ligningen er altsaa almengyldig.

Efter at v_s er fremstillet som Funktion af de uafhængige Fejl ϵ , volder det ingen Vanskeligheder at udvikle en Formel til Beregning af Middelfejlen m paa Grundlag af Fejlstørrelserne v_s . I Ligning 12 indgaar Fejlelementet ϵ_{pq} ikke alene i det første Led, men tillige een Gang i hvert af de følgende Led. Tages ϵ_{pq} ud af disse, bliver der tilbage i hver af Størrelserne

$\sum_{\epsilon}^{n \div 1}$ i alt $n \div 1$ Elementer ϵ , der alle er forskellige. Men samtlige disse Elementer indgaar tillige hver een Gang i $[\epsilon]$. Tages ogsaa disse Elementer ud af $[\epsilon]$, bliver der tilbage i denne $n^2 \div 1 \div s (n \div 1)$ Elementer ϵ , der alle er forskellige. Ordnet efter ϵ vil (12) derfor faa følgende Udseende:

$$v_{s, pq} = \left(1 \div \frac{s}{n} + \frac{s \div 1}{n^2}\right) \epsilon_{pq} \div \left(\frac{1}{n} \div \frac{s \div 1}{n^2}\right) (\epsilon_{ab} + \epsilon_{cd} + \dots s(n \div 1) \text{ Addender}) \\ + \frac{s \div 1}{n^2} (\epsilon_{hi} + \epsilon_{jk} + \dots (n^2 \div 1 \div s (n \div 1)) \text{ Addender}).$$

Nu er

$$1 \div \frac{s}{n} + \frac{s \div 1}{n^2} = \frac{(n \div 1) (n \div (s \div 1))}{n^2},$$

$$\frac{1}{n} \div \frac{s \div 1}{n^2} = \frac{n \div (s \div 1)}{n^2},$$

$$n^2 \div 1 \div s (n \div 1) = (n \div 1) (n \div (s \div 1)),$$

som indsat i den ovenstaaende ordnede Fejligning giver:

$$v_{s, pq} = \frac{(n \div 1) (n \div (s \div 1))}{n^2} \epsilon_{pq} \div \frac{n \div (s \div 1)}{n^2} (\epsilon_{ab} + \epsilon_{cd} + \dots + s(n \div 1) \text{ Addender}) \\ + \frac{s \div 1}{n^2} (\epsilon_{hi} + \epsilon_{jk} + \dots (n \div 1) (n \div (s \div 1)) \text{ Addender}). \quad (13)$$

Ved herfra at gaa over til de kvadratiske Middelværdier faas i Henhold til den almindelige Fejlteori:

$$\begin{aligned}
 \{v_s v_s\} &= m^2 \left[\left(\frac{(n \div 1)(n \div (s \div 1))}{n^2} \right)^2 + s(n \div 1) \left(\frac{n \div (s \div 1)}{n^2} \right)^2 + (n \div 1)(n \div (s \div 1)) \left(\frac{s \div 1}{n^2} \right)^2 \right] \\
 &= m^2 \frac{(n \div 1)(n \div (s \div 1))}{n^4} \left((n \div 1)(n \div (s \div 1)) + s(n \div (s \div 1)) + (s \div 1)^2 \right) \\
 &= m^2 \frac{(n \div 1)(n \div (s \div 1))}{n^2}.
 \end{aligned}$$

$\{v_s v_s\}$ er Middelværdien af v_s^2 , taget i samme Betydning som tidligere $\{cc\}$ i Slutningen af forrige Afsnit. I Praksis maa den erstattes med $\frac{[v_s^2]}{n^2}$. Man faar altsaa

$$\frac{[v_s^2]}{n^2} = m^2 \frac{(n \div 1)(n \div (s \div 1))}{n^2},$$

hvoraf

$$m^2 = \frac{[v_s^2]}{(n \div 1)(n \div (s \div 1))}. \quad (14)$$

Jo større s bliver, desto mindre bliver Divisoren til $[v_s^2]$ i Middelfejlsformlen, men samtidig bliver ogsaa Fejlrepræsentanterne v_s mindre, hvad man let ser ved et Blik paa den ordnede Fejlligning (13). For $s = n + 1$ bliver alle Fejlstørrelser v_s hver især lig Nul, og samtidig bliver ogsaa Divisoren til $[v_s^2]$ lig Nul. Middelfejlen fremtræder da under Formen

$$m^2 = \frac{0}{0},$$

er altsaa ubestemt. At Fejlrepræsentanterne bliver mindre for voksende Værdier af s , vil sige, at de fortsatte Differensdannelser efterhaanden borteliminerer større og større Dele af de paa Observationerne indgaaede Fejl. Dette maa naturnødvendigt bevirke en Nedsættelse i Nøjagtigheden af Middelfejlsberegningen, hviket finder sit særlig stærke Udtryk deri, at Middelfejlen bliver fuldkommen ubestemt for $s = n + 1$.

Den Faktor, $\frac{(n \div 1)(n \div (s \div 1))}{n^2}$, hvormed $\epsilon_{p,q}$ er multipliceret i den ordnede Fejlligning, kan betegnes som »Frihedsgraden« for Fejlrepræsentanten $v_{s,p,q}$; den angiver den Brøkdelen af en Observations sande Fejl ϵ , der indgaar i eller er repræsenteret ved den af Beregningen fremgaaede Fejlstørrelse v . Frihedsgradsbegrebet spiller i øvrigt ikke nogen større Rolle i Fejlteorien; det er nemlig kun i nogle faa og særlig simple Tilfælde, at Frihedsgraden træder klart frem og har samme Værdi for alle Fejlstørrelser v . Dette finder saaledes Sted ved

simpel Middeltalsdannelse af r lige nøjagtige Observationer, i hvilket Tilfælde Frihedsgraden er $\frac{r-1}{r}$; endvidere ved gruppevis — ogsaa gentagen gruppevis — Sammen dragging af n^2 lige nøjagtige Observationer med n i hver Gruppe, hvor Frihedsgraden da — ifølge det foregaaende — bliver $\frac{(n-1)(n-(s-1))}{n^2}$. I begge disse Tilfælde er Tælleren i Frihedsgraden lig Divisoren til $[v^2]$ i Middelfejlsformlen, hvad der er en naturlig Følge af Arten af de Beregninger, hvorved Sammen dragningen sker. Men naar Forholdene bliver mere sammensatte, træder Frihedsgraden mere tilbage. Blot man saaledes gaar over til det almindelige Tilfælde at danne Middeltal efter Vægt — altsaa af Observationer, der ikke er lige nøjagtige —, faar Frihedsgraden forskellige Værdier for de forskellige v og har ikke mere nogen simpel Tilknytning til Middelfejlsformlen. Frihedsgraden kan ogsaa defineres ud fra den Tilsløring af Fejlrepræsentantens Uafhængighed, der ligger i Tilstedeværelsen af de øvrige Fejlelementer ϵ i Fejligningen, men Resultatet bliver det samme.

Middelfejlsformlen (14) er gyldig for alle Værdier af s og kan saaledes ogsaa anvendes paa Fejlstørrelserne v_1 og v_2 , men den er dog mindre godt tilpasset til netop disse 2 Fejlgrupper, der i Væsen og Natur er grundforskellige fra Fejlstørrelserne af de efterfølgende Ordener, $v_3, v_4, \dots$, og derfor ogsaa har en helt anden fejlteoretisk Anvendelighed end disse. Vi skal udrede dette noget nærmere.

En Række Observationer $o_1, o_2, \dots, o_r$ kaldes »uafhængige« eller »indbyrdes fri«, naar Størrelsen af Fejlen paa een af dem ikke øver nogen som helst Indflydelse paa Fejlene paa de øvrige, saa der altsaa intet er til Hinder for, at Fejlen paa f. Eks. o_1 kan antage en hvilken som helst Værdi inden for de symmetrisk beliggende Grænseværdier, som Fejlen ifølge Forholdenes Natur ikke kan overskride, samtidig med at Fejlene paa hver af de andre antager en hvilken som helst af de for dem mulige Værdier. De Fejl, der tænkes paa ved denne Definition, er selve de absolutte Fejl ϵ . Disse er imidlertid altid rent teoretiske Størrelser, som aldrig kan fremstilles i Praksis. Derimod kan man ved passende valgte Regnemetoder fremskaffe Repræsentanter for dem, v — de saakaldte sandsynlige Fejl —, der er mere eller mindre sammensatte Funktioner af ϵ , og som derfor ikke har den samme indbyrdes Uafhængighed som selve Grundstørrelserne ϵ . Men dette For-

hold tager Fejlteorien selvfølgelig strængt Hensyn til. Det er Observationer af ovennævnte Art og deres Fejlrepræsentanter, den almindelige Fejlteori tager Sigte paa, og man kan derfor uden Forbehold anvende alle Fejlteoriens Formler og Grund-sætninger paa dem.

Danner man Funktioner af de ovennævnte Observationer, f. Eks. — rent vilkaarligt valgt —

$$A = \frac{o_1 + 2o_2 + 3o_3}{6}, B = \frac{o_4 \cdot o_5}{o_6},$$

saa er A og B ogsaa Observationsstørrelser, efter som de er tilvejebragte ved Observationer, og de er uafhængige indbyrdes, thi de indeholder ingen fælles Led og har derfor heller ingen fælles Fejldele.

Danner man derimod Funktioner, der indeholder fælles Elementer, f. Eks.

$$C = \frac{o_1 + 2o_2 + 3o_3}{6}, D = \frac{o_3 \cdot o_4}{o_2},$$

saa er C og D ogsaa Observationsstørrelser, men de er ikke indbyrdes uafhængige, thi Fejlene paa C og D har nu fælles Andele, der berører dem noget af den relative fri Bevægelighed.

Virkningen af et Afhængighedsforhold — eller, om man vil, Slægtskab — mellem Observationsstørrelser er fejlteoretisk set meget stor. I Modsætning til de uafhængige Observationer, hvis Fejl staar fuldkommen frit over for hverandre, er de afhængige Størrelser og deres Fejl bundne til hverandre, og Baandet mellem dem afhænger ganske af Arten og Omfanget af Slægtskabet, der under vekslende Omstændigheder naturligvis kan varieres i det uendelige. Saadanne Observationsstørrelser og deres Fejl er blottede for Individualitet; de mangler det Særpræg, som Uafhængigheden giver de fri Observationer, og som netop er den Hovedegenskab, Fejlteorien er bygget op paa. De afhængige Observationsstørrelser og deres Fejlrepræsentanter staar uden for den almindelige Fejlteoris Grund, og man tør i intet Tilfælde anvende de almindelige Fejlformler paa dem. De ovenfor omhandlede Fejlrepræsentanter v_s er afledede af Differenserne d_{s+1} , thi de er fremgaaede som Resultat af Beregninger alene med disse Størrelser. De er de absolutte Fejl paa d_s , hvad der kun har teoretisk Betydning, men hvis

d_{s+1} er indbyrdes fri Observationsstørrelser, saa er v_s desuden de sandsynlige Fejl paa d_{s+1} og kan behandles i Overensstemmelse dermed efter den almindelige Fejlteori. Er derimod d_{s+1} indbyrdes afhængige Størrelser, vedbliver v_s at være de teoretiske, absolutte Fejl paa d_s , men er ikke mere de sandsynlige Fejl paa d_{s+1} ; deres Forhold til de Størrelser, hvoraf de er afledede, er nu af en mere sammensat Natur, der helt retter sig efter Arten og Omfanget af det indbyrdes Afhængighedsforhold mellem disse. Denne Mangel paa faste Egenskaber ved Fejlrepræsentanter, afledede af afhængige Observationsstørrelser, gør det umuligt at opstille faste, almengyldige Regler for deres Behandling. Tvinges man af Omstændighederne til at anstille fejlteoretiske Undersøgelser paa Grundlag af Fejlrepræsentanter, der er afledede af afhængige Observationsstørrelser, maa dette ske ved en detailleret Analyse, i hvilken man nøje følger Fejlenes Forhold og Adfærd paa alle Stadier fra Begyndelsen til Enden. Analysen maa som Regel indledes med, at man fremstiller de afhængige Fejlstørrelser som Funktioner af de absolutte Fejl ϵ paa Observationerne.

Vi skal derefter vende tilbage til Specialundersøgelsen af de enkelte Fejlgrupper.

Fejlstørrelserne $v_1, v_2, \dots$ indgaar som Led i Differenserne og som Regel blandet sammen med andre Bestanddele, som man ikke kan skille dem ud fra. Man kan derfor kun beregne talmæssige Værdier for Fejlstørrelserne i de Tilfælde, hvor de i Ligning 11 ved $f(O)$ og $\varphi(\delta)$ betegnede Bestanddele er Nul for samtlige Differenser af een og samme Orden, thi i saa Fald reduceres den enkelte Differens af denne Orden til

$$d = \psi(\epsilon) = v$$

og er altsaa sammenfaldende med Fejlrepræsentanten. Naar $f(O)$ og $\varphi(\delta)$ er Nul for alle Differenser af een og samme Orden, vil det samme finde Sted for Differenserne af alle højere Ordener. Der er saaledes intet til Hinder for, at man kan beregne flere Sæt Fejlstørrelser, men man bør altid bruge det Sæt, der er af laveste Orden, thi, som tidligere omtalt, bliver v mindre, jo højere Ordenen er, og dermed ogsaa mindre egnet til Fejlberegninger. Hvor i Ordensrækken, man første Gang vil finde Mulighed for en talmæssig Beregning af Fejlstørrelser, beror ganske paa de foreliggende Omstændigheder.

Er saaledes alle Observationer Gentagelsesværdier for den samme Størrelse, og der ikke findes systematiske Fejl, som skal bortelimineres, vil allerede Fejlgruppen v_1 afgive talmæssige Fejlverdier, medens det under mere sammensatte Forhold først vil falde paa et senere Stadium.

Naar en Fejlgruppe lader sig beregne i talmæssig Form, maa den altsaa i Henhold til ovenstaaende være sammenfaldende med Differenserne af samme Orden, og følgelig er dens enkelte Elementer afledet direkte af Differenserne af nærmeste lavere Orden ved en Ligning af Formen

$$v_{s, pq} = d_{s+1, pq} \div \frac{d_{s+1, ab} + d_{s+1, cd} + \dots + d_{s+1, pq} + \dots (n \text{ Addender})}{n}$$

Fejlgruppen v_1 er altsaa som talmæssigt Værdisæt afledet umiddelbart af Observationerne, og Afledningsligningen er her

$$v_{1, pq} = o_{pq} \div \frac{o_{p, 1} + o_{p, 2} + \dots + o_{p, n}}{n}$$

Ifølge Sagens Natur er Observationerne indbyrdes frie Størrelser, og Fejlgruppen v_1 er altsaa de sandsynlige Fejl paa disse.

Paa tilsvarende Maade afledes Fejlgruppen v_2 , naar denne lader sig beregne i talmæssig Form, af Differenserne a , og Afledningsligningen er her

$$v_{2, pq} = a_{pq} \div \frac{a_{1, q} + a_{2, q} + \dots + a_{n, q}}{n}$$

En Differens a er en sammensat Observationsstørrelse, dannet ved en Kombination af alle de i den paagældende lodrette Søjle opførte Observationer. Men de i ovenstaaende Ligning for v_2 indgaaede Størrelser a danner tilsammen en enkelt vandret Række i Tableauet, har altsaa kun et enkelt a -Element fra hver Søjle og indeholder følgelig ingen fælles Observations-Elementer. De er derfor indbyrdes frie Observationsstørrelser, og v_2 er deres sandsynlige Fejl.

Begge Fejlgrupperne v_1 og v_2 er altsaa sandsynlige Fejl paa indbyrdes frie Observationsstørrelser og ligger derfor helt paa den almindelige Fejlteoris Grund. Anderledes er det med v_3 . Naar Betingelserne er til Stede for denne Fejlgruppes Beregning, afledes den af Differencerne b ved en Afledningsligning

af samme Art som de foregaaende. Men som det fremgaar af Ligning 3, indeholder alle Størrelser b det fælles Led $\frac{[o]}{n^2}$; de er altsaa afhængige Observationsstørrelser, og v_3 er som Følge deraf ikke deres sandsynlige Fejl. Differenserne b og de af dem afledede Fejlrepræsentanter v_3 ligger derfor uden for den almindelige Fejlteoris Grund, og det samme gælder i forstærket Grad Differenser og Fejlstørrelser af alle højere Ordener.

Hayde alle Differenser af samtlige Ordener været indbyrdes frie, kunde man have afledet Middelfejlsformlen direkte ud fra de almindelige fejlteoretiske Grundsætninger. I saa Fald vilde nemlig v_s have været de sandsynlige Fejl paa Differenserne d_{s+1} (jvf. Side 652), og følgende vilde Middelfejlen m_{s+1} paa d_{s+1} fremgaa af

$$m_{s+1}^2 = \frac{[v_s^2]}{n(n+1)}.$$

Betegnes almindeligt Middelfejlen paa en Differens d_r med m_r , saa vilde man som Følge af den Maade, hvorpaa det ene Sæt Differenser afledes af det foregaaende, og stadig under Forudsætning af Uafhængighed for alle Differenserne desuden have

$$\begin{aligned} m_{s+1}^2 &= \frac{n+1}{n} m_{s+2}^2, \quad m_{s+2}^2 = \frac{n+1}{n} m_{s+3}^2 \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots m_2^2 &= \frac{n+1}{n} m_1^2, \quad m_1^2 = \frac{n+1}{n} m^2. \end{aligned}$$

Elimineres dernæst $m_1, m_2, \dots, m_{s+1}$ af de ovenstaaende s Ligninger, faas

$$m^2 \left(\frac{n+1}{n} \right)^{s+1} = \frac{[v_s^2]}{n(n+1)},$$

hvoraf

$$m^2 = \frac{[v_s^2]}{n^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^s. \quad (15)$$

Den indbyrdes Uafhængighed, der betinger Formel 15, er til Stede ved v_1 og v_2 . Med disse to Fejlgrupper kan man derfor efter Forgodtbefindende beregne Middelfejlen ved (14) eller (15), selvfølgelig med samme Resultat. Med v_3 hører derimod Gyldigheden af (15) op, da vi nu har at gøre med afhængige Størrelser. For denne og følgende Fejlgrupper er man derfor henvist alene til (14).

Formel 15 er bygget op og udformet alene ud fra Uafhængighedsegenskaben, som derfor helt præger den. Den er herigennem i Kontakt med Fejlstørrelserne selv og er af denne Grund Formel 14 overlegen. Formel 14 bærer derimod intet som helst Præg af selve

Fejlstørrelserne, hvad der for øvrigt har sin naturlige Grund i, at den tager Sigte paa afhængige Fejlrepræsentanter, der selv intet Særpræg har. Formlen er udformet alene ud fra de rent mekaniske Regneoperationer, Materialet har været underkastet, og har derfor sit Særpræg fra disse. At den strækker sit Gyldighedsomraade ikke alene over de afhængige Fejlgrupper, men ogsaa over de to uafhængige, v_1 og v_2 , er en naturlig Følge af, at v_1 og v_2 har været underkastet ganske de samme Regninger som de øvrige.

Det er let at se, at den ensidige Fejl er fuldstændig udlignet ved den almindelige Opgørelse af Forsøget — altsaa i Middeltallet af Afgrøderne fra hvert Forsøgsleds Fællesparceller — og bortelimineret i 2. Ordens Differenserne b , naar Ensighedheden ytrer sig som en ren Skraaplansvirkning; men i Virkeligheden rækker Udlignings- henholdsvis Eliminationsevnen af Forsøgsopgøret og af de to første Sæt Differenser meget videre, hvad nærmere skal blive paavist nedenfor (ved denne Paa-visning bliver det nødvendigt at ty til specielle matematiske Hjælpemidler, som ikke har været anvendte i det foregaaende).

Vi lægger et retvinklet 3-akset Koordinatsystem ned over Forsøgsmarken, med Begyndelsespunktet f . Eks. i nederste, venstre Hjørne, med x -Aksen parallel med de vandrette Rækker, y -Aksen parallel med Søjlerne og en δ -Akse vinkelret paa xy -Planen. Den ensidige Fejl δ i et vilkaarligt Punkt (x, y) af Marken kan da, uanset hvilken Lov Fejlen end følger, fremstilles ved en Ligning af Formen

$$\delta = F(x, y),$$

Betingelsen for, at δ kan udlignes fuldstændig i Opgørelsen og elimineres af Differenserne b , er, at $F(x, y)$ ikke indeholder noget Led af Formen $x^r y^t$. Naar denne Betingelse er opfyldt, kan Ligningen for δ skrives under Formen

$$\delta = f_1(x) + f_2(y), \quad (16)$$

hvor f_1 og f_2 er vilkaarlige Funktioner, og vi skal nu se, hvorledes δ under Forudsætning af den saaledes formede Fordelingslov virker ind paa Forsøgsopgøret og paa Differenserne af 2. Orden, b .

Den ensidige Fejls Indvirkning paa Middeltallet af et Forsøgsleds Fællesparceller er

$$D = \frac{\delta_{ab} + \delta_{cd} \dots (n \text{ Addender})}{n},$$

hvis Tæller indeholder et δ -Element fra hver Søjle og hver Række. Beregnet af Ligning 16 vil Værdien af D derfor blive, naar g betegner Forsøgsmarkens Udstrækning i Retning ad x-Aksen og h dens Udstrækning i Retning ad y-Aksen,

$$D = \frac{\int_0^g f_1(x) dx}{g} + \frac{\int_0^h f_2(y) dy}{h} = \frac{[\delta]}{n^2}$$

Opgørsresultatet for hvert enkelt Forsøgsled er altsaa paa-virket af den ensidige Fejl med ganske samme Værdi som den, der hviler paa hele Markens Gennemsnitsafgrøde, og heri bestaar jo netop Udligningen. Hvilken Værdi man i øvrigt vil tillægge $\frac{[\delta]}{n^2}$, er fuldkommen vilkaarligt, thi ingen kan med Bestemthed sige, hvor meget den ensidige Fejlaarsag har ind-virket paa Markens Totalafgrøde eller Gennemsnitsafgrøde. For Udnyttelsen af Forsøget er dette ogsaa ligegyldigt, da det her væsentlig drejer sig om at opnaa rigtige relative Vurderinger. Formentlig vil man i Praksis almindeligvis sætte $\frac{[\delta]}{n^2} = 0$.

Den ensidige Fejl paa en Differens b_{pq} er ifølge (5)

$$E = \delta_{pq} \div \frac{\delta_{p,1} + \delta_{p,2} + \dots + \delta_{p,n}}{n} \div \frac{\delta_{1,q} + \delta_{2,q} + \dots + \delta_{n,q}}{n} + \frac{[\delta]}{n^2}.$$

Beregnet af (16) er

$$\begin{aligned} \delta_{pq} &= \frac{n}{g} \int_{(p-1)\frac{g}{n}}^{p\frac{g}{n}} f_1(x) dx + \frac{n}{h} \int_{(q-1)\frac{h}{n}}^{q\frac{h}{n}} f_2(y) dy \\ \frac{\delta_{p,1} + \delta_{p,2} + \dots + \delta_{p,n}}{n} &= \frac{n}{g} \int_{(p-1)\frac{g}{n}}^{p\frac{g}{n}} f_1(x) dx + \frac{\int_0^h f_2(y) dy}{h} \\ \frac{\delta_{1,q} + \delta_{2,q} + \dots + \delta_{n,q}}{n} &= \frac{\int_0^g f_1(x) dx}{g} + \frac{n}{h} \int_{(q-1)\frac{h}{n}}^{q\frac{h}{n}} f_2(y) dy \\ \frac{[\delta]}{n^2} &= \frac{\int_0^g f_1(x) dx}{g} + \frac{\int_0^h f_2(y) dy}{h} \end{aligned}$$

Naar disse Udtryk indsættes i Ligningen for E, reduceres denne til

$$E = 0.$$

I Differenserne b er den ved (16) definerede ensidige Fejl altsaa elimineret.

Vi skal forsøge at illustrere disse Forhold ved et Eksempel, hvortil vælges den i nedenstaaende Tegning fremstillede 4-delte Forsøgsmark. De paaførte Koordinater svarer til Parcellernes Midtpunkter. Antages hver Parcel at være et Kvadrat med Side = 2, bliver Talværdierne for Koordinaterne

$$\begin{array}{ll} x_1 = y_1 = 1 & x_3 = y_3 = 5 \\ x_2 = y_2 = 3 & x_4 = y_4 = 7 \end{array}$$

y			
a	$x_1 y_4$	$x_2 y_4$	r $x_3 y_4$ $x_4 y_4$
$x_1 y_3$	$x_2 y_3$	c $x_3 y_3$	s $x_4 y_3$
p $x_1 y_2$	b $x_2 y_2$	$x_3 y_2$	$x_4 y_2$
$x_1 y_1$	q $x_2 y_1$	$x_3 y_1$	d $x_4 y_1$
A	x		

Den ensidige Fejl paa en Parcel antages at være lig den Værdi, δ har i Parcellens Midtpunkt, og Fordelingsloven for δ forudsættes at være (16), altsaa

$$\delta = f_1(x) + f_2(y).$$

Lad a, b, c og d være Fællesparcellerne for et Forsøgsled. De ensidige Fejl paa disse Parceller er da:

$$\begin{aligned}
 \text{paa a: } \delta_a &= f_1(x_1) + f_2(y_1) \\
 \text{» b: } \delta_b &= f_1(x_2) + f_2(y_2) \\
 \text{» c: } \delta_c &= f_1(x_3) + f_2(y_3) \\
 \text{» d: } \delta_d &= f_1(x_4) + f_2(y_4)
 \end{aligned}$$

hvis Middelværdi D_1 bliver

$$D_1 = \frac{f_1(x_1) + f_1(x_2) + f_1(x_3) + f_1(x_4)}{4} + \frac{f_2(y_1) + f_2(y_2) + f_2(y_3) + f_2(y_4)}{4}.$$

Et andet Forsøgsled har Fællesparcellerne p, q, r og s, hvis ensidige Fejl er:

$$\begin{aligned}
 \text{paa p: } & f_1(x_1) + f_2(y_1) \\
 \text{» q: } & f_1(x_2) + f_2(y_2) \\
 \text{» r: } & f_1(x_3) + f_2(y_3) \\
 \text{» s: } & f_1(x_4) + f_2(y_4)
 \end{aligned}$$

hvis Middelværdi D_2 bliver

$$D_2 = \frac{f_1(x_1) + f_1(x_2) + f_1(x_3) + f_1(x_4)}{4} + \frac{f_2(y_1) + f_2(y_2) + f_2(y_3) + f_2(y_4)}{4}.$$

Endelig bliver den ensidige Fejl paa Gennemsnitsafgrøden af Marken

$$D = \frac{4}{16} (f_1(x_1) + f_1(x_2) + f_1(x_3) + f_1(x_4) + f_2(y_1) + f_2(y_2) + f_2(y_3) + f_2(y_4))$$

Det ses, at D_1 , D_2 og D er lige store; Udligningen er altsaa fuldstændig, og dette Resultat er naaet, uden at det har været nødvendigt at forudsætte noget som helst om Formerne af Funktionerne f_1 og f_2 . Disse kan derfor være vilkaarlige.

Anderledes vilde Forholdene være, hvis Fordelingsloven foruden f_1 og f_2 tillige indeholdt et Led, hvori x og y indtræder kombineret med hinanden, f. Eks.

$$\delta = f_1(x) + xy + f_2(y).$$

Leddene $f_1(x)$ og $f_2(y)$ vil selvfølgelig her virke ganske som ovenfor og gensidig udligne hinanden, men nu kommer det ny Led xy til, og vi skal da specielt undersøge dets Virkninger.

Paa de betragtede to Forsøgsleds Parceller bliver Virkningen af Leddet xy , naar Koordinaternes Talværdier indsættes:

paa a:	$x_1y_4 = 7$	paa p:	$x_1y_2 = 3$
» b:	$x_2y_2 = 9$	» q:	$x_2y_1 = 3$
» c:	$x_3y_3 = 25$	» r:	$x_3y_4 = 35$
» d:	$x_4y_1 = 7$	» s:	$x_4y_3 = 35$
Sum:	48		76
Middeltal:	12		19

og paa hele Markens Gennemsnitsafgrøde bliver Virkningen 16. Den fra Leddet xy hidrørende Andel af den ensidige Fejl faar altsaa forskellige Værdier for de forskellige Forsøgsled. Den fuldstændige Udligning i Opgørelsen er derfor betinget af, at Led af Formen x^ry^t , eller mere almindeligt $f(xy)$, ikke indgaar i Fordelingsloven.

Betragter man dernæst Differenserne og atter forudsætter Fordelingsloven at være $\delta = f_1(x) + f_2(y)$, saa ses det, at hvis man benytter Søjlerne som Grupper for Differenserne af 1. Orden, bortelimineres straks de for Parcellerne i den enkelte Søjle fælles Led $f_1(x)$. Tilbage bliver da som ensidig Fejl paa Differenserne af 1. Orden en Funktion af y , der f. Eks. for den øverste Parcel i 2. Søjle bliver $f_2(y_4) \div \frac{1}{4}(f_2(y_1) + f_2(y_2) + f_2(y_3) + f_2(y_4))$. Men det ses let, at disse Funktioner bliver ens for alle Parceller i en og samme vandret Række og derfor vil udgaa ved Dannelsen af Differenserne af 2. Orden. Disse er altsaa ganske frigjorte for ensidige Fejl, naar denne følger den forudsatte Fordelingslov.

Indeholder Fordelingsloven derimod Led, hvori x og y optræder kombineret med hinanden, vil dette ligesom ved Forsøgsopgørelsen indføre Uligheder, der bevirker, at 2. Ordens Differenserne ikke bliver helt frigjorte for ensidige Fejl. Er det omhandlede Led xy , vil der paa 2. Ordens Differenserne hvile de i nedenstaaende Oversigt opførte ensidige Fejlrester:

$\div 9$	$\div 3$	$+ 3$	$+ 9$
$\div 3$	$\div 1$	$+ 1$	$+ 3$
$+ 3$	$+ 1$	$\div 1$	$\div 3$
$+ 9$	$+ 3$	$\div 3$	$\div 9$

Ligning (16) fremstiller geometrisk en Flade, dannet ved en Kombination af to Cylinderflader¹⁾, hvoraf den ene har sine

¹⁾ Ved en Cylinderflade forstaas her en Flade, der beskrives af en ret Linie — Frembringeren — som bevæger sig saaledes, at den stadig er parallel med en fast Udgangsstilling. Ved Cylinderfladens Ledelinie forstaar man Skæringskurven mellem Cylinderfladen og en vilkaarlig valgt plan Flade.

Frembringere parallelle med x-Aksen, den anden med y-Aksen, og hvis Ledelinier i henholdsvis $y\delta$ -Planen og $x\delta$ -Planen er vilkaarlige Kurver. En saadan Flade er meget bøjelig; den kan variere lige fra en Plan i en hvilken som helst Stilling — d. e. Skraaplanen — til en Flade med talløse større og mindre Toppe og Fordybninger, om end med en vis Regelbundethed. Det maa derfor anses for utvivlsomt, at (16) betegner en god Tilnærmelse, hvilken Form den sande Fordelingslov for δ end maatte have, og som Følge deraf tør man betragte det som givet, at den allervæsentligste Del af den ensidige Fejl vil være bortelimineret allerede i Differenserne b og følgelig ogsaa i de af b afledede Fejlrepræsentanter v_3 samt udlignet i Opgørelsen.

Paa den anden Side kan man dog ikke helt se bort fra, at (16) er en speciel Funktion, der vel er at anse for en god Tilnærmelse, men som dog aldrig kan forudsættes at gengive den ensidige Fejl med fuld matematisk Nøjagtighed. Følgelig maa man gaa ud fra, at der altid vil være en ensidig Fejlrest tilbage saavel i Opgørsresultatet som i Differenserne b . Den ensidige Fejlrest, der hviler paa Differenserne b , forplanter sig ved den paafølgende Differensdannelse helt eller delvis over paa Fejlrepræsentanterne v_3 og berører disse noget af deres Evne til at danne rigtige Middelfejlsværdier. Disse Forhold kan opfordre til at forsøge paa at opnaa en mere fuldstændig Udskillelse af δ ved fortsatte Differensdannelser. Her møder man dog en Vanskelighed, thi skal de fortsatte Differensdannelser øve den tilsigtede Virkning, maa Grupperne, der benyttes til Dannelsen af Differenserne, udvælges paa en saadan Maade, at de kommer i Kontakt med den Lov, hvorefter den ensidige Fejlrest fordeler sig over Forsøgsmarken, men denne Lov er — i det mindste indtil videre — ukendt, Grupperne udtages derfor i Blinde, og det bliver da ret tilfældigt, om man opnaar den ønskede Forbedring eller ikke. Dog, hvis man udfører et ikke alt for ringe Antal efter hinanden følgende Differensdannelser, bliver Gruppeudtagningen varieret paa saa mange Maader, at der er en vis Sandsynlighed for, at mindst een af dem virker i den rigtige Retning.

Man kan paa følgende Maade danne sig et Skøn over, om et Sæt Fejlrepræsentanter v_3 er behæftede med ensidige Fejl eller ikke. De beregnede Talværdier — med Fortegn —

for v_s skrives ind i Tableauet i den sædvanlige Orden. Derefter gaar man hen over de indførte v_s -Værdier paa en vis lovbunden Maade, f. Eks. ned ad den ene Søjle efter den anden, hen ad den ene Række efter den anden, eventuelt tillige hen ad samtlige de Rækker, der er parallelle med een eller med begge Diagonalerne. Bestaar v_s kun af tilfældige Fejl, skal man under disse Vandringer træffe paa omtrent lige mange Tegnskifter og Tegnfølger, og der maa ikke kunne spores nogen som helst regelmæssig »Gang« i Værdifordelingen. Dernæst skrives Fejl-værdierne op i en Kolonne, ordnede efter Størrelse, idet man f. Eks. begynder med den laveste negative Værdi og og ender med den højeste positive, og ud for hver Værdi anføres det Antal Gange, hvori den forekommer i Tableauet. De to Grænseværdier skal da være omtrent numerisk lige store og maa ikke gerne overskride $3\sqrt{\frac{[v_s^2]}{n^2-1}}$; de maa desuden kun forekomme hver en enkelt eller dog kun et meget ringe Antal Gange. De numerisk smaa Værdier skal forekomme hyppigere end de større, omtrent $\frac{2}{3}$ af samtlige Fejl skal være mindre end $\sqrt{\frac{[v_s^2]}{n^2-1}}$, og endelig skal Værdifordelingen være omtrent symmetrisk i Forhold til 0-Værdien. Viser der sig kendelige Afvigelser fra disse Normer, tyder det paa Tilstedeværelse af ensidige Fejl. Der vil da tillige som Regel vise sig en tydelig udtalt »Gang« i Værdifordelingen i Tableauet, og heraf vil man ofte kunne skønne, hvorledes de resterende ensidige Fejl er fordelt over Forsøgsmarken. Derigennem faar man nogen Vejledning med Hensyn til Valget af Grupper under en fornyet Differensdannelse. Det vil være rigtigt at begynde saadanne Prøver allerede med v_s for snarest at blive vejledet med Hensyn til fortsatte Differensdannelser.

Er Fejlrepræsentanterne befriede for ensidige Fejl, kan det samme med nogenlunde Sikkerhed forudsættes om det Sæt Differenser d_{s+1} , af hvilke de umiddelbart er afledede.

Som Eksempel paa en Værdifordeling med udpræget »Gang« kan peges paa Oversigten Side 667 over de resterende ensidige Fejl paa en 4-delt Mark efter to Differensdannelser. Vil man her fortsætte Differensdannelsen for at formindske den ensidige Fejl-virkning, kan Grupperne vælges som vist nedenfor (til venstre), hvor de med samme Bogstav betegnede Elementer

danner Gruppe sammen. Efter udført Differensdannelse bliver de tilbageværende ensidige Fejl (Tableauet til højre):

a	d	c	b	$\div 4$	0	0	$+ 4$
d	a	b	c	0	$+ 4$	$\div 4$	0
c	b	a	d	0	$\div 4$	$+ 4$	0
b	c	d	a	$+ 4$	0	0	$\div 4$

En ny Differensdannelse kan udføres med Grupper som vist nedenfor (til venstre), hvor Bogstavordningen er den samme som ovenfor, men hvor der er føjet et Indeks til Bogstaverne. Elementer med samme Indeks danner Grupper. Efter udført Differensdannelse bliver de nu tilbageværende ensidige Fejl (Tableauet til højre):

a_1	d_3	c_4	b_2	$\div 2$	$+ 2$	$\div 2$	$+ 2$
d_2	a_4	b_3	c_1	$\div 2$	$+ 2$	$\div 2$	$+ 2$
c_3	b_1	a_2	d_4	$+ 2$	$\div 2$	$+ 2$	$\div 2$
b_4	c_2	d_1	a_3	$+ 2$	$\div 2$	$+ 2$	$\div 2$

En ny Differensdannelse, anordnet som vist nedenfor, hvor det andet Indekstal angiver Grupperne, bringer sluttelig alle ensidige Fejl til at forsvinde.

a_{11}	d_{34}	c_{42}	b_{23}
d_{22}	a_{43}	b_{31}	c_{14}
c_{33}	b_{12}	a_{24}	d_{41}
b_{44}	c_{21}	d_{13}	a_{32}

Der kan her være Anledning til at bemærke, at der under forskellige Omstændigheder er stor Forskel paa den Frihed, man har ved Valget af Grupper. Differenserne falder naturligt i to Kategorier, af hvilke den ene hidtil har været betegnet ved d — for Differenserne af 1. og 2. Orden dog med henholdsvis a og b —, den anden ved v. Differenser af d-Kategorien er Funktioner af de 3 Bestanddele O, δ og ϵ , medens v-Kategorien kun indeholder δ og ϵ . δ -Elementerne kan indgaa i ret forskellig Grad. Formaalet med Differensdannelsen er jo netop at udskille dem, og som Regel naar man nærmere til dette Maal, jo højere man kommer op i Differensernes Ordensfølge, uden dog nogen Sinde helt at blive fri for dem. I denne Forbindelse er dette dog uden Interesse; det afgørende er her, om O indgaar eller ikke.

Har man at gøre med Differenserne af d-Kategorien og vil fremstille et nyt Sæt Differenser af samme Kategori, maa Grupperne udtages saaledes, at de indeholder et Element af hvert Forsøgsled. Forsynder man sig mod denne Regel, indfører man vilkaarlige, ukontrolable Forskelligheder i den indre Opbygning af Differenserne, hvorved den videre Udnyttelse af disse vil give misvisende Resultater. Selvfølgelig maa man tillige overholde den universelle Regel, at to Elementer, der een Gang har været i Gruppe sammen, ikke kommer dette mere.

Overgangen fra d- til v-Kategorien sker ved en Differensdannelse, hvor Grupperne dannes af de til Fællesparcellerne svarende Differenser d. Herved bortelimineres Elementerne O.

Fortsættes Differensdannelsen med Differenserne af v-Kategorien — d. e. Fejlrepræsentanterne —, er man kun bundet af Kravet om, at to Elementer ikke maa komme i Gruppe sammen mere end een Gang. De i v indgaaede Elementer δ og ϵ er ikke paavirkede af, om de hører til det ene eller det andet Forsøgsled, og derfor er der nu intet til Hinder for at danne Grupper, hvori der indgaar flere Elementer fra samme Forsøgsled. Der opnaas herved en meget betydelig Forøgelse af Friheden i Valget af Grupper, hvorved det bliver meget lettere at tilpasse disse til Gangen i den ensidige Fejls Fordeling. Hvis man derfor under en Række Differensdannelser ikke er interesseret i Differenserne d, men kun i Fejlrepræsentanterne v, vil det være rigtigt at gaa over til disse allerede paa et tidligt Stadium.

Har man anset det for paakrævet at anvende flere end 3 Sæt Differenser (a , b og v_3) for i behørig Grad at faa Fejlrepræsentanterne frigjorte for ensidige Fejl, saa kan man ikke mere med fuld Ret gøre Forsøget op blot ved at danne Middeltallet af de observerede Afgrøder o for Forsøgsleddets Fællesparceller og ansætte Middelfejlen paa denne Middelværdi til $\sqrt{\frac{m^2}{n}}$, thi som det straks skal blive vist, er den ensidige Fejl under disse Forudsætninger ikke helt udlignet paa den nævnte Middelværdi, og følgelig kan den Middelfejl m , der beregnes af de for ensidige Fejl befrieede Fejlrepræsentanter, heller ikke retmæssigt benyttes til Bestemmelse af Fejlmaalene paa de saaledes opgjorte Forsøgsled.

Som tidligere anført, kræver Udligningen, at

$$\frac{1}{n} \sum_f \delta = \frac{1}{n^2} [\delta],$$

idet $\sum_f \delta$ her betegner Summen af δ for Forsøgsleddets Fællesparceller. Men det er tidligere vist, at denne Betingelse kun kan opfyldes, naar den ensidige Fejl følger den ved (16) angivne Fordelingslov. Men er dette Tilfældet, vil, som ogsaa tidligere vist, den ensidige Fejl være fuldstændig bortelimineret i 2. Ordens Differenserne b. Da man imidlertid her er gaaet ud fra, at det var nødvendigt at anvende et større Antal Differensdannelser, maa Forudsætningen være, at den ensidige Fejl fordeler sig efter en mere sammensat Lov, d. v. s., at Fordelingsloven foruden $f_1(x)$ og $f_2(y)$ ogsaa indeholder et Led $f(xy)$, og i saa Fald er $\frac{1}{n} \sum_f \delta$ en variabel Størrelse, der antager forskellige Værdier for de forskellige Forsøgsled. Under disse Omstændigheder maa Opgørelsen foretages ved Hjælp af selve Differenserne, hvis den skal blive fuldt ud korrekt. Vi skal nu vise, hvorledes dette kan gøres.

Lad d_{s+1} være et Sæt Differenser, i hvilke man efter anstillede Prøver med tilstrækkelig Tilnærmelse kan betragte de ensidige Fejl som borteliminerede. Desuden forudsættes det, at man ved Dannelsen af d_{s+1} og alle de foregaaende Differenser ingen Sinde har anvendt Fællesparcellerne som Grupper. Naar disse Betingelser er opfyldte, vil d_{s+1} være Funktioner af de sande, for alle Fejlvirksomheder befriede Parcelagrøder O og de tilfældige Fejl ϵ , nemlig

$$d_{s+1, pq} = O_{pq} \div \frac{\sum_1^{pq} O}{n} \div \frac{\sum_2^{pq} O}{n} \div \dots \div \frac{\sum_{s-1}^{pq} O}{n} + (s \div 2) \frac{[O]}{n^2} + v_{s+1, pq} \quad (17)$$

hvor

$$v_{s+1, pq} = \epsilon_{pq} \div \frac{\sum_1^{pq} \epsilon}{n} \div \frac{\sum_2^{pq} \epsilon}{n} \div \dots \div \frac{\sum_{s-1}^{pq} \epsilon}{n} + (s \div 2) \frac{[\epsilon]}{n^2}. \quad (18)$$

De i (17) indgaaede Led af Formen $\frac{1}{n} \sum_0^{pq}$ er Middeltallene af Størrelserne O for samtlige de Grupper, hvori Elementet med Indeks pq efterhaanden er indgaaet. Da hver Gruppe indeholder et O-Element fra hvert Forsøgsled, og O er kon-

stant for eet og samme Forsøgsled, vil hvert af Leddene $\frac{1}{n} \sum_0^{pq}$ være lig $\frac{1}{n^2} [O]$. Som Følge deraf reduceres (17) til

$$d_{s+1, pq} = O_{pq} \div \frac{[O]}{n^2} + v_{s+1, pq} \quad (19)$$

Det ses heraf, at en Differens d_{s+1} er lig Forskellen mellem den sande Værdi af den paagældende Parcellers Afgrøde og den sande Gennemsnitsafgrøde for hele Forsøgsmarken samt en tilfældig Fejl v_{s+1} . De til et Forsøgsleds Fællesparceller svarende d_{s+1} afviger fra hverandre kun som Følge af Svingningerne i v_{s+1} .

Dannes Middeltallet af d_{s+1} for et Forsøgsleds Fællesparceller, faas

$$\frac{\sum_f d_{s+1}}{n} = \frac{\sum_f O}{n} \div \frac{[O]}{n^2} + \frac{\sum_f v_{s+1}}{n},$$

idet Indeks f ved et Summationstegn ogsaa her betegner, at Summationen skal omfatte Forsøgsleddets Fællesparceller. Det sidste Led paa højre Side af denne Ligning er (jvf. Side 655)

$$\frac{\sum_f v_{s+1}}{n} = \frac{\sum_f \varepsilon}{n} \div \frac{[\varepsilon]}{n^2},$$

som indsat giver

$$\frac{\sum_f d_{s+1}}{n} = \frac{\sum_f O}{n} + \frac{\sum_f \varepsilon}{n} \div \left(\frac{[O]}{n^2} + \frac{[\varepsilon]}{n^2} \right).$$

Nu er, idet o ligesom tidligere betegner de direkte observerede Afgrøder,

$$\frac{[O]}{n^2} + \frac{[\varepsilon]}{n^2} = \frac{[o]}{n^2} \div \frac{[\delta]}{n^2},$$

som indsat giver

$$\frac{\sum_f d_{s+1}}{n} = \frac{\sum_f O}{n} + \frac{\sum_f \varepsilon}{n} \div \frac{[o]}{n^2} + \frac{[\delta]}{n^2}.$$

Lægges $\frac{1}{n^2} [o]$ til begge Sider af denne Ligning, og betegnes Summen med H, saa faas

$$H = \frac{\sum_f d_{s+1}}{n} + \frac{[o]}{n^2} = \frac{\sum_f O}{n} + \frac{\sum_f \epsilon}{n} + \frac{[\delta]}{n^2}. \quad (20)$$

Afgrøden af Forsøgsleddet, saaledes som den kan afledes af Differenserne, er

$$H = \frac{\sum_f d_{s+1}}{n} + \frac{[o]}{n}, \quad (21)$$

og som det fremgaar af (20), er den lig Middeltallet af de sande Afgrøder paa Forsøgsleddets Parceller, hvortil kommer en tilfældig Fejl, der er Middeltallet af de paa de tilsvarende Observationer o hvilende tilfældige Fejl ϵ , samt et ensidigt Fejll $\frac{1}{n^2} [\delta]$, der er fælles for alle Forsøgsled og for Gennemsnitsafgrøden. Udligningen af den ensidige Fejl er altsaa fuldstændig. Middelfejlen paa H er $\sqrt{\frac{m^2}{n}}$, der jo dog kun karakteriserer den tilfældige Fejl, medens den lader den ensidige Fejlandel ude af Betragtning.

Den almindelige Opgørelse ved blot at danne Middeltallet af de observerede Værdier af Fællesparcellernes Afgrøder giver

$$H' = \frac{\sum_o o}{n}.$$

Sættes heri

$$o = O + \epsilon + \delta,$$

faas

$$H' = \frac{\sum_f O}{n} + \frac{\sum_f \epsilon}{n} + \frac{\sum_f \delta}{n}.$$

Ved at sammenligne med (20) ses, at Forskellen mellem de to Opgørelser er

$$H - H' = \frac{[\delta]}{n^2} - \frac{\sum_f \delta}{n}.$$

Med en Fejlfordelingslov for den ensidige Fejl af Formen

$$\delta = f_1(x) + f_{(xy)} + f_2(y),$$

der jo netop er Motiveringen til den fortsatte Differensdannelse, er $\frac{1}{n} \sum \delta$ en variabel Størrelse med forskellige Værdier for de forskellige Forsøgsled, og Forskellen mellem H og H' er da reel. Derimod er de to Opgørelser sammenfaldende, naar Fordelingsloven for den ensidige Fejl har den simple Form

$$\delta = f_1(x) + f_2(y).$$

Foruden Differenserne d_{s+1} maa der selvfølgelig af Hensyn til Middelfejlsberegningerne fremstilles Fejlrepræsentanter v_s , der dannes som det næste Sæt Differenser, idet man nu benytter Fællesparcellerne som Grupper, hvorved alle af O afhængige Led bortelimineres.

De ovenfor udviklede Formler saavel som dem, man kan hente fra den almindelige Fejlteori, er matematisk og fejlteoretisk fuldt eksakte. Ikke desto mindre bliver al Fejlregning i Praksis mere eller mindre tilnærmet, og Grunden hertil ligger i Mangler og Ufuldkommenheder ved selve det observationsmæssige Grundlag. De almenyldige Formler til Fejlregning tager udelukkende Sigte paa »tilfældige« Fejl, men i Praksis lykkes det aldrig at gøre de beregnede Fejlrepræsentanter fuldstændig fri for ensidige Fejldele, og heri ligger Hovedgrunden til Fejlregningens Usikkerhed. De tilfældige Fejl er fuldkommen symmetriske omkring Nulværdien; deres Grænselværdier ligger hver paa sin Side af og lige langt fra Nul, og »Hyppighedsforekomsten« af de forskellige Fejlverdier indenfor Grænserne er ligelig fordelte paa det positive og negative Omraade. Denne Symmetri i Forbindelse med Uafhængigheden er de Grundegenskaber, Fejlteorien fortrinsvis er bygget op paa. Men Tilstedeværelsen af ensidige Andele i Fejlene forstyrrer Symmetrien og delvis ogsaa Uafhængigheden, og derved kommer der altsaa en Uoverensstemmelse ind mellem Grundlaget og Anvendelsen af dette, hvad der ikke bliver uden Følger for Resultatet. Ensidige Fejl bevirker, at de beregnede Middelfejl bliver for smaa i Forhold til de virkelige Fejl paa Observationsresultaterne, giver altsaa et for lyst Billede af Nøjagtigheden.

En anden Aarsag til Ufuldkommenhed i Fejlregningen maa søges i den Omstændighed, at man i Praxis ikke kan fremskaffe uendelig mange Fejlrepræsentanter, hvad Teorien forudsætter. Virkningen heraf er dog som Regel mindre betydende, da Erfaringen viser, at man kommer ret nær til det sande selv med et beskedent Antal Fejlrepræsentanter, naar disse blot ikke er tilslørede af ensidige Fejlvirkninger.

Sluttelig skal bemærkes, at det Afhængighedsforhold mellem Differenserne, der skabes ved den her anvendte Sammen-
dragningsmaade, i nogen Grad nedsætter Fejlrepræsentanternes fri Bevægelighed, og i samme Grad taber $\frac{[v_s^2]}{n^2}$ i Evne til at repræsentere $\{v_s v_s\}$, hvilket selvfølgelig maa indføre et Usikkerhedsmoment i Fejlregningen. Virkningen af dette Forhold er dog ret ringe for de lavere Værdier af s , men vokser kende-
ligt, efterhaanden som s kommer op paa højere Værdier. Forhold af denne og lignende Art er uundgaelige i Praxis.
