Om Fejlberegning i Dyrkningsforsøgets Tjeneste.

Af E. Lindhard.

I et Festskrift, udsendt i Anledning af *Bastian R. Larsens* Jubilæum som Forsøgsleder i Norge[1]), har *G. Holtsmark* offentliggjort en Afhandling: »Om middelfejlens avhængighet av parcellernes størrelse«.

I Afhandlingen, der delvis reviderer et af *Holtsmarks* tidligere Arbejder, som er offentliggjort her i Tidsskriftet[2]), stiller han sig til Opgave at undersøge, hvordan Middelfejlen paa Afgrøden fra lige store Parceller inden for et givet Areal forandrer sig, naar Parcellernes Areal tiltager, derved at disse sammenlægges to og to til stedse større Parceller. Forholdet undersøges først paa Talmaterialet fra et ens behandlet Areal (dyrket med samme Planteart), som har været inddelt i Parceller af samme Størrelse og Form og høstet som Forsøg. Forfatteren finder her, at Middelfejlen tiltager stærkere ved stigende Parcelstørrelse, end Reglerne for Middelfejlens Sammensætning forudsætter. Han faar nemlig $m_2^2 > 2m_1^2$, hvor m_1 er den oprindelige Middelfejl og m_2 Middelfejlen paa en Parcel af den dobbelte Størrelse, medens Fejllæren ved tilfældig Variation forudsætter $m_2^2 = 2m_1^2$. Aarsagen til denne Uoverensstemmelse søges deri, at Markens Frugtbarhed, som betinger Afgrødestørrelsen, ikke varierer vilkaarlig fra Parcel til Parcel men tiltager og aftager mere jævnt, f. Eks. fra den

---

[1]) Norsk Forsøksarbejd i Jordbruket. Redaktionskomite: *N. Ødegaard, K. Vik, Olav Klokk.* Kristiania 1914. Side 60—79.

[2]) *G. Holtsmark* og *Bastian R. Larsen:* Om muligheder for at indskrænke de fejl, som ved markforsøg betinges af jordens uensartethed. 12. Bind, Side 330. 1905.

ene Side af Forsøgsarealet til den anden, saaledes at Sandsynligheden er overvejende for, at to sammenstødende Parceller enten begge har negative eller begge positive Fejl. I begge Tilfælde bliver deres Produkt positivt med den Følge, at m_2^2 bliver større end $2m_1^2$.

Nu søger Forf. ved Beregning af Middelfejlen paa en Parcel, som er dannet ved Sammenføjning af mindre Parceller, at finde et Udtryk for Forsøgsarealets Skævhed i den foran nævnte Betydning. Vi giver ham selv Ordet:

»For nu at finde en formel for beregning av middelfejlen paa en parcel, som er dannet ved sammenføjning av mindre parceller, tænker jeg mig en mark med n elementærparceller, hvis fejl er $v_1, v_2 \cdots v_n$, middelfejlen m, bestemt ved

$$m_1^2 = (v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_n^2) : n.$$

Samme mark inddeles derpaa i parceller, som hver bestaar av p sammenstøtende elementærparceller. Antallet av disse større parceller blir saaledes $\frac{n}{p}$ og deres middelfejl m_p beregnes av

$$m_p^2 = [(v_1 + v_2 + \cdots v_p)^2 + (v_{p+1} + \cdots v_{2p})^2 + \cdots] : \frac{n}{p},$$

hvor antallet av led indenfor [ ] er $\frac{n}{p}$. Formlen utvikles:

$$m_p^2 = [(v_1^2 + v_2^2 + \cdots v_p^2 + v_{p+1}^2 + \cdots + v_n^2) + 2(v_1 v_2 + v_3 v_4 \cdots\cdots) \cdot \frac{p}{n}$$

$$= p \cdot m_1^2 + \frac{p}{n} \cdot 2(v_1 v_2 + v_3 v_4 + \cdots).$$

Den gennemsnitlige talværdi av produkterne $v_1 v_2$, $v_3 v_4 \cdots$ kan tilnærmet sættes lik m_1^2. Antallet av saadanne produkter i sidste parantes er

$$\frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{n}{p}.$$

Er marken av den beskaffenhet, at der blandt disse produkter er like mange positive og negative, kalder jeg marken ret; er derimot enten de positive eller de negative i overvejende antal, kalder jeg marken skjæv, henholdsvis positiv skjæv og negativ skjæv. Jeg skriver

$$(v_1 v_2 + v_3 v_4 + \cdots) = \tfrac{1}{2}\varkappa \cdot \frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{n}{p} \cdot m_1^2,$$

hvor $\frac{1}{2}\varkappa$ er en for forsøksmarken ejendommelig konstant, som uttrykker, hvor stor brøkdel av et antal fejlprodukter av et bestemt fortegn der ikke har et motsvarende fejlprodukt av det motsatte fortegn. $\varkappa$ danner saaledes et maal for markens skjævhet i den her definerte betydning. Man faar saaledes

$$m_p^2 = p \cdot m_1^2 + \frac{p}{n} \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2}\varkappa \frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{n}{p}\, m_1^2,$$

$$m_p^2 = m_1^2 \left(p + \varkappa \frac{p(p-1)}{2}\right).«$$

Holtsmarks Tanke er her smukt udformet, og Regningen synes uangribelig. Det undersøges nu paa en lang Række Eksempler, hvorledes denne Formel svarer til Formaalet. Blandt disse Eksempler vælger vi det mest anskuelige og giver atter *Holtsmark* Ordet:

»Jeg gaar nu over til at beskrive en del nye forsøk, jeg har anstillet for at prøve formlerne. Samtlige disse »forsøk« er kunstige. Da det her kun kommer an paa fejlene, blir alene disse opført.

Eks. I.

7	5	3	a	1	— 1	— 3	— 5	— 7
a						c		
7	5	3		1	— 1	— 3	— 5	— 7
7	5	3		1	— 1	— 3	— 5	— 7
			b					
6	5	3		1	— 1	— 3	— 5	— 7
7	5	3		1	— 1	— 3	— 5	— 7
7	5	3		1	— 1	— 3	— 5	— 7
c						d		
7	5	3		1	— 1	— 3	— 5	— 7
7	5	3		1	— 1	— 3	— 5	— 7

Her og i det følgende tænkes parcellerne kvadratiske. Tallene angir parcellernes fejl og er ordnede efter parcellernes beliggenhet. Her er 64 elementærparceller, som sammensættes to og to til dobbeltparceller. Disse sammensættes atter to og to til 16 parceller, hver indeholdende 4 elementærparceller o. s. v. Dobbeltparcellerne dannes efter et av skemaerne aa, de firedobbelte som b, de ottedobbelte som cc, de sekstendobbelte som d. Der blir saaledes

64 enkeltparceller
64 dobbeltparceller
16 firdobbelte parceller
16 ottedobbelte parceller
4 sektendobbelte parceller

Her er

$$m_1{}^2 = (7^2 + 5^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2 + \dots \quad) : 64 = 21$$
$$m_2{}^2 = (14^2 + 10^2 + \dots \quad + 12^2 + 4^2 \dots) : 64 = 82$$
$$m_4{}^2 = (24^2 + 8^2 + \dots \quad \dots) : 16 = 320$$
$$m_8{}^2 = (32^2 + \dots + 48^2 + \dots) : 16 = 1152$$
$$m_{16}{}^2 = (64_2 + \dots \quad) : \ 4 = 4096$$

Endvidere er

$$\mu^2 = (2^2 + 2^2 + \cdots 0^2 + 0^2 + \cdots) : 64 = 2$$

(μ = Middelforskellen mellem de sammenlagte Parceller).

Av $m_1{}^2$ og $m_2{}^2$ findes $\varkappa$, idet

$$m_2{}^2 = m_1{}^2\,(2 + \varkappa)$$
$$\text{ɔ: } 82 = 21\,(2 + \varkappa)$$
$$\underline{\varkappa = 1.905.}$$

Formlerne prøves nu paa den maate, at de forskellige middelfejl samt middelforskellen μ, eller snarere deres kvadrater beregnes ved hjælp av værdierne for $m_1{}^2$ og $\varkappa$. De saaledes »beregnede« værdier sammenlignes med de ovenfor »direkte« fundne.

	Beregnet		Direkte
$m_1{}^2 \cdot 1$	$= m_1{}^2 = 21 \cdot 1$	$= 21$	21
$m_1{}^2\,(2 + \varkappa)$	$= m_2{}^2 = 21 \cdot 3.905$	$= 82$	82
$m_1{}^2\,(4 + 6\varkappa)$	$= m_4{}^2 = 21 \cdot 15.43$	$= 324$	320
$m_1{}^2\,(8 + 28\varkappa)$	$= m_8{}^2 = 21 \cdot 61.34$	$= 1288$	1152
$m_1{}^2\,(16 + 120\varkappa)$	$= m_{16}{}^2 = 21 \cdot 244.6$	$= 5137$	4096
$m_1{}^2\,(2 - \varkappa$	$= \mu^2 = 21 \cdot 0.095$	$= 1.995$	2«

Om Udfaldet af saadanne Prøver paa Formlens Anvendelighed siger *Holtsmark:*

»Som man ser, er overensstemmelsen mindre og mindre god, jo større parcellerne blir. Dette maa ligge i at $\varkappa$ avhænger av parcelstørrelsen. Ved bruken av nærværende formler maa man altsaa være opmærksom paa, at $\varkappa$ ikke med sikkerhet kan anvendes, naar man gaar til meget store variationer i parcelstørrelsen.«

Denne Forklaring er lidet tilfredsstillende, saasom den atter slører den Løsning af Problemet, som alt var stillet i Udsigt. For bedre at kunne bedømme, om den nu ogsaa er rigtig, skal vi se lidt nærmere paa Grundlaget for hele Undersøgelsen.

Allerede i sit første Arbejde her i Tidsskriftet (l. c. Side 116) benytter *Holtsmark* som Grundlag for sine Undersøgelser Formlen for den sande Middelfejl

$$m^2 = \frac{v_1{}^2 + v_2{}^2 + \cdots + v_n{}^2}{n}.$$

Hans Betragtning er den, at Middelværdien af samtlige Parcelafgrøder er en sand Middelværdi, og at Forskellen mellem hver enkelt Parcelafgrøde og denne er at betragte som sande, ikke blot tilsyneladende Fejl. Denne Betragtning er uangribelig, idet man, naar alle Elementer opfattes som givne, ogsaa kan beregne den sande Middelfejl for det hele System. Men den første Gang, denne Formel skal bruges, bryder *Holtsmark* selv Betingelsen for dens rette Anvendelse, nemlig at samtlige Differenser føres i Regningen, idet han (Side 337 i den citerede Afhandling) af 960 Parcelafgrøder udtager 120 og regner videre med Differensen mellem hver af disse 120 Størrelser og Gennemsnittet af alle 960 Størrelser. Saaledes sættes en tilfældig, tilnærmet Værdi i den sande Middelfejls Sted. Fremdeles regnes der i Afhandlingen med Formlen for den sande Middelfejl, men Læseren gøres ikke opmærksom paa, at Forholdet mellem Middelfejlen paa et Element og Middelfejlen paa et Gennemsnit af flere Elementer er et andet i et Fejlsystem, opbygget paa denne Formel, end i et System, opbygget paa den plausible Middelfejls Formel, og Forf. selv tager i sine Sammenligninger intet Hensyn hertil.

Imod denne Inkonsekvens i *Holtsmarks* Afhandling stødte jeg an, og den har mulig bidraget til, at jeg i et senere Arbejde[1]) bestræbte mig for at gennemføre en Fejlberegning helt efter dens Forudsætninger — alle Muligheder udtømte. Nu vilde det ikke være berettiget at bedømme et Arbejde, som det før omtalte, ud fra et alt for ensidigt matematisk Synspunkt. Det er det første i sit Slags og har maattet søge sin Styrke i en enkel, populær Fremstilling af Mulighederne for Fejllærens Anvendelse under disse særlige Forhold. Jeg indskrænkede mig derfor i den citerede Afhandling til at paavise Uholdbarheden af en af *Holtsmarks* Formler, som stod i direkte Modstrid med min Afhandlings Ide.

I Stedet for denne har *Holtsmark* nu udarbejdet den Formel, der her beskæftiger os. Men er nu Formlen for den sande Middelfejl, der ogsaa her er benyttet, i dette Tilfælde rigtig anvendt? Vi skal se.

Eks. I egner sig udmærket for Undersøgelsen. Middelfejlen er betinget af Skævheden alene, idet Tallene illustrerer et Skraaplan, der regelmæssig falder fra venstre til højre. Vi skal først undersøge, om Problemet kan løses ved Hjælp af den plausible Middelfejl, dennes Kvadrat er

$$\sigma^2 = \frac{v_1{}^2 + v_2{}^2 + \cdots + v_n{}^2}{n - 1}.$$

Omregnes nu *Holtsmarks* »direkte« Fejl ved Multiplikation med $\frac{\nu}{\nu - 1}$, $\nu = \frac{n}{p}$ = Antallet af større Parceller, og divideres med p^2, saaledes at Fejlene paa de forskellige Parcelstørrelser

[1]) *E. Lindhard:* Om det matematiske Grundlag for Dyrkningsforsøg paa Agermark. 16. Bind, Side 337. 1909.

direkte kan sammenlignes, saa finder man (her altsaa den procentiske Værdi for) $\sigma_1{}^2 = \sigma_p{}^2 = 21\frac{1}{3}$ ($m_2{}^2$ og $m_8{}^2$ danner en Undtagelse, hvortil vi kommer tilbage). Konstanten $\varkappa$ er her virkelig konstant og har sin Maksimalværdi 2, idet Skævheden er komplet. Indsættes σ i *Holtsmarks* Formel i Stedet for m, skal man saaledes have

$$\sigma_p{}^2 = \sigma_1{}^2 \left(p + \varkappa \frac{p(p-1)}{2}\right) \quad (1)$$

eller i det givne Eksempel, hvor $\varkappa = 2$,

$$\sigma_p{}^2 = p^2 \sigma_1{}^2.$$

Ved denne Regning, endelig, elimineres *Holtsmarks* μ.

Det er dog ikke uberettiget her at regne med den sande Middelfejl, kun er det noget besværligere end at regne med den plausible Middelfejl. I min Afhandling Side 351 (l. c. Side 120) er Forholdet mellem Middelfejlen paa et Element og Middelfejlen paa et Gennemsnit af flere Elementer angivet for hvert af disse to Fejlsystemer. Omskrevet i den her benyttede Symbolik skal man have

$$\sigma_p{}^2 = p\sigma_1{}^2 \text{ og } m_p{}^2 = p m_1{}^2 \frac{n-p}{n-1}.$$

Med σ i Stedet for m gav *Holtsmarks* Formel os den søgte, konstante Værdi $\varkappa$; det samme vil naas, naar $\frac{n-p}{n-1}$ indsættes i Formlen. Denne skal altsaa lyde

$$m_p{}^2 = m_1{}^2 \left(p + \varkappa \frac{p(p-1)}{2}\right) \frac{n-p}{n-1} \quad (2)$$

eller med $\varkappa = 2$, $m_p{}^2 = p^2 m_1{}^2 \frac{n-p}{n-1}$.

En Efterregning vil vise, at under denne Form giver Formlen det ønskede Resultat, dog kun for de direkte fundne Værdier af $m_4{}^2$ og $m_{16}{}^2$; for $m_2{}^2$ og $m_8{}^2$ er de »direkte« Værdier forkerte. Gennemsnittet af to rektangulære Parcellers Fejlkvadrater er ikke lig Fejlkvadratet paa en kvadratisk Parcel af samme Areal. Dette giver med *Holtsmarks* Formel en for lav Værdi for $\varkappa$ og bidrager, idet $\varkappa$ beregnes paa Grundlag af $m_2{}^2$, til at skjule, at denne Størrelse i *Holtsmarks* Regning omtrent skal aftage med $\frac{n-p}{n-1}$.

Rigtigt beregnede, skal de »direkte« Værdier for kvadratiske Parceller i dette Eksempel være

$$m_1{}^2 = 21 \qquad m_8{}^2 = 1194\tfrac{2}{3}$$
$$m_2{}^2 = 82\tfrac{2}{3} \qquad m_{16}{}^2 = 4096$$
$$m_4{}^2 = 320 \qquad \mu^2 = 1\tfrac{1}{3}$$

Med disse Rettelser bliver *Holtsmarks* Udvikling staaende.

I det foregaaende er Middelforskellen μ i Forbigaaende nævnt. Jeg sætter $\mu_p{}^2$ = Middelværdien af Kvadraterne af Forskellen mellem de Parceller, der lægges sammen til større Parceller. μ svarer herefter som Middelforskel til den Middelfejl, jeg i den citerede Afhandling har betegnet som »den falske Middelafvigelse«, og kan derfor uden videre indsættes i Formlen Side 346 i nævnte Afhandling, idet $\mu_p{}^2 \frac{p-1}{2\,p}$ = »den falske Middelafvigelses Kvadrat«. Omskrives nu Formlen i *Holtsmarks* her benyttede Udtryk og multipliceres med p^2, faar man

$$p^2\, m_1{}^2 \div \mu_p{}^2 \frac{p\,(p-1)}{2} = m_p{}^2, \qquad (3)$$

hvilket med $p = 2$ giver $2^2\, m_1{}^2 \div \mu_2{}^2 = m_2{}^2$, (4)
og dette Udtryk erstatter *Holtsmarks* kasserede Formel,

$$2\,m_1{}^2 + \mu^2 = m_2{}^2.$$

Formlerne 3 og 4 giver med en hvilken som helst Parcelform og en hvilken som helst Fordeling af Skævheden den sande Middelfejl for den større Parcel. Formlerne 1 og 2, derimod, er Genvejsformler, der kun for kvadratiske Parceller og med en nogenlunde regelmæssig Fordeling af Skævheden giver tilnærmelsesvis rigtige Værdier for Fejlen paa den større Parcel, men de er til Gengæld lettere at benytte. Vil man endelig benytte Formel 3 som Grundlag for en Genvejsberegning, maa Skævheden defineres saaledes:

Marken er ret, naar $\mu_n = \mu_p = \mu_2$ ɔ: naar Forskellen mellem Elementærparcellerne er uafhængig af deres indbyrdes Afstand.

Er Marken skæv, skal man have $\mu_n > \mu_p > \mu_2$, og er Skævheden komplet, saa er $\mu_n{}^2 = \frac{n}{2}\mu_2{}^2$ og $\mu_p{}^2 = \frac{p}{2}\mu_2{}^2$, idet Middelforskellen vokser med Afstanden mellem de sammenlagte Parceller, d. v. s. med Kvadratroden af de større Parcellers Areal. Nu er $\mu_n{}^2 = m_1{}^2 \frac{2n}{n-1}$ altid let at udfinde; bestemmes dèr foruden f. Eks. $\mu_4{}^2$, har man for $p > 4$, $\mu_4{}^2 + (\mu_n{}^2 - \mu_4{}^2)$

$\frac{p-4}{n-4} = \mu_p{}^2$. μ_p, saaledes funden, indsættes i Formel 3, og denne vil, ligesom Formel 1 og 2, med tilnærmet Sikkerhed gælde for kvadratiske Parceller og hvor Skævheden er nogenlunde jævnt fordelt.

Men endnu har jeg nogle Bemærkninger tilbage. I en Efterskrift siger *Holtsmark*, foranlediget ved min før citerede Afhandling, bl. a.:

»Hr. *Lindhards* undersøkelser støtter sig paa en matematisk utvikling, som hr. *Lindhard* oplyser stammer fra en ham ubekjent forfatter, men er ham overladt av hr. generalmajor *V. H. O. Madsen.* Samme utvikling findes forøvrig i en artikel av mig, offentliggjort i Zeitschrift für Mathematik und Physik, utgit av *R. Mehmke* og *C. Runge*, 52de Bind, 1906, side 412—13. Denne artikel, som er tre aar ældre end hr. *Lindhards* arbejde, synes ikke at være bemærket av hr. *Lindhard*, uagtet der henvises til den paa side 331 i *Larsens* og min før citerede artikel. Jeg er i denne artikel kommen til samme formel som hr. *Madsens* hjemmelsmand.«

I Anledning af disse Bemærkninger har Generalmajor *V. H. O. Madsen* velvilligst meddelt mig følgende:

»Udviklingen omtales i »Astronomische Nachrichten« Nr. 1770, dateret København 1869, August 11, i en Skrivelse paa Dansk fra *Andræ* til Udgiveren. Denne Skrivelse er en Critik af en Afhandling af *Jordan* i Nr. 1766—67 (Carlsruhe 1869, Juli 4), hvori Differentserne mellem Observationerne benyttes til at bestemme Nøjagtigheden. Senere tog *Jordan* paany til Orde om samme Sag i Maj 1872 i Astr. Nachr. Nr. 1886, hvad der fremkaldte en ny Artikel fra *Andræ* i samme Tidsskrift Nr. 1889.

Som De vil se, er Udviklingen 45 Aar gammel.«

Andræ's Udvikling er i min Afhandling, anvendt i en Efterskrift, hvis Formaal alene var at vise, at *Holtsmarks* Formel, som kolliderede med mine Beregninger, var forkert. Jeg foretrak her denne Udvikling for *Holtsmarks* tilsvarende, af ham citerede Udvikling, fordi den var den ældste og tillige den smukkeste i Formen. En almindelig Redegørelse for andre matematiske Arbejder laa ganske uden for min Plan.

Men jeg vender tilbage til *Holtsmarks* og *Bastian R. Larsens* Afhandling. Vi Danske skylder Forfatterne Tak, fordi de i et dansk Tidsskrift paa det rette Grundlag har rejst Spørgsmaalet om Fejlberegning i Dyrkningsforsøgets Tjeneste. Skulde Kritiken efterhaanden lægge ogsaa Manglerne ved dette Arbejde blot, maa Forfatterne deri se det bedste Bevis for, at de hernede virkelig er blevet læst med Eftertanke.