

Om Nøjagtigheden ved Tørstofbestemmelser i Roer.

Af R. K. Kristensen.

Ved de i den senere Tid førte Diskussioner angaaende Tørstofbestemmelser i Roer er den Opfattelse gjort gældende, at det skulde være vanskeligt at udtage paalidelige Prøver af den ved Gennemsavningen af Roerne fremkomne Pulpmasse. Imod denne Opfattelse taler Resultatet af en Undersøgelse, der er beskrevet i Tidsskrift for Landbrugets Planteavl, 18. Bind, Side 299 og 300. Der blev her udtaget 24 Fællesprøver af samme Pulpmasse. Middelfejlen paa de enkelte Prøver var 0.08 pCt. Tørstof eller under 3 pro mille af det fundne Tørstofindhold. Dette maa siges at være en temmelig ringe Fejl, men det kan maaske indvendes, at Resultatet af en saadan enkelt Undersøgelse ikke behøver at være helt karakteristisk for den Sikkerhed, hvormed Prøveudtagningen i Almindelighed kan udføres. Ved Statens Forsøgsstationer foreligger imidlertid et stort Materiale, der kan benyttes til Belysning af Spørgsmaalet, da de forskellige Forsøg medfører, at der hvert Aar udtages et stort Antal Roeprøver til Tørstofbestemmelse. I det følgende skal der gives en lille Oversigt over Nøjagtigheden ved en Række Tørstofbestemmelser, udførte i Laboratoriet ved Statens Forsøgsstation i Askov i Aarene 1905—11.

Oversigten omfatter Runkelroer, Kaalroer, Turnips og Gulerødder. For Runkelroernes Vedkommende stammer Materialet fra nogle fastliggende Gødningsforsøg, hvorfra der hvert Aar udtages 20 Prøver af Runkelroer til Tørstofbestemmelse. For Kaalroernes og Gulerøddernes Vedkommende er Materialet af samme Oprindelse og Omfang indtil 1907; men fra og med

1908, da Kaalroer og Turnips udgik af de nævnte Forsøg, er der benyttet to andre Forsøgsrækker, hvor der, henholdsvis af Kaalroer og Gulerødder, er udtaget 12 Prøver til Tørstofbestemmelse hvert Aar (det bemærkes, at ingen af de to Forsøgsrækker gaar tilbage til 1905). For Turnipsroernes Vedkommende hidrører alle Tørstofbestemmelserne fra et fastliggende Forsøg, som afgiver 12 Analyseprøver aarlig.

Tørstofbestemmelserne er udførte paa den almindelige, i 55. og 56. Beretning fra Statens Forsøgsvirksomhed i Plante-kultur beskrevne Maade. Der er stadig udtaget 3 Fællesprøver paa ca. 15 g af Pulpmassen. Indtil 1906, inkl., blev de udtagne Prøver af Pulpen blandet med en Teskefuld Pimpsten, der blev rørt sammen med Pulpen ved Hjælp af en Glaspind, men i de efterfølgende Aar blev Prøverne tørrede uden Brug af Pimpsten. Ved den anvendte Fremgangsmaade er den ikke nødvendig for Tørringens Skyld, og der indføres en Fejlkilde ved dens Tilsætning, da det vil paavirke Analyseresultatet, hvis Pimpstenen ikke er fuldstændig tør. Desuden beskadiger den Glassene, der bliver ridsede stærkt ved Sammenrøringen. Der spares en Del Arbejde ved ikke at benytte Pimpsten. Sammenrøringen undgaas, og Glassenes Taravægt kan fastsættes en Gang for alle, saa man kan nøjes med to Vejninger i Stedet for tre. Der benyttes ingen Glaspind, Pulpen trykkes op paa Siderne af Glasset med Bagsiden af Teskeen, som Prøverne udtages med.

En god Overensstemmelse mellem Fællesanalyserne vil jo kun opnaas, naar Tørreapparatet fungerer saaledes, at Prøverne bliver tørrede fuldstændig. I denne Henseende har det stor Betydning, at der er tilstrækkeligt Lufttræk i Ovnen. Ved Benyttelse af en Vandtermostat med to Ventilationsrør (8 mm i Tværmaal) viste det sig nødvendigt at lade Laagen til Tørre-rummet staa paa Klem, naar dette var fuldt af Prøver. I modsat Fald slog der Dampe ud af Ovnen, naar Laagen blev lukket op, Overensstemmelsen mellem Fællesprøverne blev mindre god, og ved Omtørring svandt Prøverne forholdsvis meget i Vægt.

Tabel 1 giver en Oversigt over de enkelte Analyseresultaters Afvigelse fra Middeltallet af de 3 sammenhørende Tørstofbestemmelser (Fællesanalyser). I den øverste Talrække i hver af Tabellens 4 Afdelinger er disse Afvigelser — i anden Deci-

mal af Tørstofprocenten — opførte efter Størrelse, de øvrige Tal angiver det Antal Afvigelse, der har været af den paagældende Størrelse. I enkelte Tilfælde har der kun foreligget 2 Fællesanalyser, fordi den tredje er blevet ødelagt eller har givet et ubrugeligt Resultat paa Grund af en eller anden grov Fejl, f. Eks. en Fejlvejning. For at faa Materialet fuldstændigt er der da indsat en saadan Værdi for den manglende Analyse, at Middelfejlen paa de tre Analysetal er lig Middelfejlen paa de to virkelige Analyser. Den paagældende Værdi kan findes af følgende Formel

$$x = g \pm \sqrt{\frac{n+1}{n}} m^2,$$

hvor g er Middeltallet af de oprindelig foreliggende Analyse-resultater, medens n er Antallet af disse, og m er Middelfejlen paa de enkelte Analyser¹⁾. Ved denne Fremgangsmaade vil

¹⁾ Kaldes Middelfejlen paa de $n+1$ Størrelser m_1 , medens Middelfejlen paa de n Størrelser er m , har man $m = m_1$ og $m^2 = m_1^2$. Kaldes de oprindelige Analyseresultater $r_1, r_2, \dots, r_n$, og er d Differensen mellem Middeltallet af disse og Middeltallet af de $n+1$ Størrelser, har man

$$m^2 = \frac{(g-r_1)^2 + (g-r_2)^2 + \dots + (g-r_n)^2}{n-1} = \frac{[v^2]}{n-1} \text{ og}$$

$$m_1^2 = \frac{(g+d-r_1)^2 + \dots + (g+d-r_n)^2 + (g+d-x)^2}{n} = \frac{[v_1^2]}{n}.$$

Men $(g-r)^2 = g^2 - 2gr + r^2$, $[v^2] = ng^2 - 2g[r] + [r^2]$,

og $(g+d-r)^2 = g^2 + d^2 + r^2 + 2dg - 2gr - 2dr$,

$[v_1^2] = ng^2 + nd^2 + [r^2] + 2ndg - 2g[r] - 2d[r] + (g+d-x)^2$, altsaa er

$[v_1^2] = [v^2] + nd^2 + (g+d-x)^2$, (idet $2ndg = 2d[r]$).

Da $m^2 = m_1^2$, er $\frac{[v^2]}{n-1} = \frac{[v^2] + nd^2 + (g+d-x)^2}{n}$. Multipliceres med n og

subtraheres $[v^2]$ paa begge Sider af Lighedstegnet faas

$$\frac{[v^2]}{n-1} = nd^2 + (g+d-x)^2 \text{ eller } m^2 = (n+1)d^2 + g^2 + x^2 - 2dx - 2gx + 2dg.$$

Men $d = \frac{ng+x}{n+1} - g = \frac{x-g}{n+1}$; indsættes denne Værdi i Ligningen, faas

$$m^2 = (x^2 - 2gx + g^2) \frac{n}{n+1} \text{ og deraf } x^2 - 2gx = \frac{n+1}{n} m^2 - g^2, \text{ og Løsningen}$$

af denne anden Grads Ligning giver

$$x = g \pm \sqrt{\frac{n+1}{n}} m^2.$$

Er n lig 2, og kaldes de to oprindelige Analyser a og b , har man $x = g \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(a-b)^2}{2} = g \pm \sqrt{3} \frac{a-b}{2}$ (idet $m^2 = \frac{(a-b)^2}{2}$, se »Om det matematiske Grundlag for Dyrkningsforsøg paa Agermark« af E. Lindhard,

de to Analyser, a og b, faa lidt større Vægt end de almindelige Analyser, men da det kun drejer sig om nogle faa Tilfælde, vil dette være uden Betydning for den videre Behandling af Materialet.

Paa Grundlag af de i Tabel 1 opførte Afvigelser er Middelfejlen beregnet for de enkelte Aar og de enkelte Roearter ved

Hjælp af Formlen $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{p(n-1)}}$, hvor v betyder de enkelte

Afvigelser, n Antallet af Fællesanalyser, altsaa 3, og p Antallet af Roeprøver. De fundne Værdier, der altsaa gælder Middelfejlen paa Enkeltanalyserne — ikke Middeltallet af de 3 Fællesanalyser —, er opførte i Tabel 2. Den forneden anførte Middelværdi for hver Roeart er fremkommen paa den Maade, at hele Materialet fra alle 7 Aar er behandlet under eet. Hvor der har været lige mange Roeprøver hvert Aar (Runkelroer og Turnips), er denne Fremgangsmaade ensbetydende med at tage simpelt Gennemsnit af de 7 Værdier for m^2 .

Som det ses, er Middelfejlen mindst ved Runkelroerne og størst ved Kaalroerne. Det kan i denne Forbindelse anføres, at Blandingen af Pulpmassen foregaar lettest ved Runkelroerne, fordi Pulpen her er af en mere flydende Beskaffenhed end ved de andre Roearter. Men for de sidstes Vedkommende kunde man tænke sig, at den Omstændighed, at Roesaften ikke saa let skiller sig ud fra de faste Dele, vilde lette en paalidelig Prøveudtagning. Foruden disse Momenter vil Prøvernes Forhold under Tørringen sandsynligvis ogsaa have Indflydelse paa Overensstemmelsen mellem Fællesanalyserne. Den særegne Beskaffenhed af Pulpen fra Runkelroerne bevirker saaledes, at Prøverne tørres forholdsvis hurtig. Og hvis der foregaar særlige

nærværende Tidsskrift, 16. Bind, Side 355—356, hvor Forholdet mellem Middelfejl og Middeldifferens er udredet).

Eksempel: $a = 12.46$, $b = 12.40$.

$$x = \frac{12.46 + 12.40}{2} \pm \frac{12.46 - 12.40}{2} \cdot 1.7 = 12.43 \pm 0.05 = 12.48 \text{ eller } 12.38.$$

$$m = m_1 = 0.042.$$

De fundne to Værdier for x er lige brugbare, da Middelfejlen bliver lige stor i begge Tilfælde. (Det maa erindres, at det ikke her drejer sig om at finde den sandsynligste Værdi for Tørstofindholdet af vedkommende Roeprøve, thi denne Værdi er lig Middeltallet af de to virkelige Analyser, men derimod den sandsynligste Værdi for Middelfejlen).

Tabel 1. Antal Afvigelse efter Størrelse.
(Afvigelse fra Middeltallet af 3 Fællesanalyser, anden Decimal af
Tørstofprocenten).

Runkelroer.																		
	÷ 8	÷ 7	÷ 6	÷ 5	÷ 4	÷ 3	÷ 2	÷ 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
1905					2	2	4	13	18	10	6	4	1					60
06		1	1		1	4	6	11	10	14	7	1	3					60
07					2	4	7	10	13	12	6	2	3	1				60
08			1	1	3	4	7	9	13	7	4	5	3	1	2			60
09				1	2	2	5	14	13	11	5	4	3					60
10				1	2	4	4	14	11	10	9	3		2				60
11				1	3	2	12	7	12	8	5	6	2	1		1		60
Sum		1	2	4	15	22	45	78	90	72	42	25	15	6	2	1		420

Kaalroer.																		
	÷ 8	÷ 7	÷ 6	÷ 5	÷ 4	÷ 3	÷ 2	÷ 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
1905			1	2	5	2	4	12	10	8	6	2	4	3	1			60
06			2	2	2	5	5	10	10	6	4	5	5	3		1		60
07		1	3	3	4	4	4	4	4	9	9	6	5	4				60
08		1	2	1	2	2	4	2	5	3	4	3	4	2	1			36
09			2		1	9	6	4	2	4	6	1	1	1				36
10				2		3	3	6	9	3	4	4		1		1		36
11		1	1		1	2	5	7	5	4	1	4	3		2			36
Sum		3	11	10	14	19	34	47	47	35	32	30	22	14	4	1	1	324

Gulerødder.																		
	÷ 8	÷ 7	÷ 6	÷ 5	÷ 4	÷ 3	÷ 2	÷ 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
1905			2	1	2	2	7	8	10	13	10	2		2		1		60
06				2	5	4	4	12	11	6	5	6	3	1		1		60
07		1		1	4	2	8	8	12	8	7	4	2	2	1			60
08				1	3	3	3	2	8	5	6	4		1				36
09			1	1	1	3	4	8	2	5	5	2	1	1	2			36
10					1	4	5	2	9	8	4	1	2					36
11					2	2	5	9	7	3	2	2	1	2	1			36
Sum		1	3	6	18	20	36	49	59	48	39	21	9	9	4	2		324

Turnips.																		
	÷ 8	÷ 7	÷ 6	÷ 5	÷ 4	÷ 3	÷ 2	÷ 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
1905			1	1	3	2	4	2	5	7	5	3	2		1			36
06				1	3	2	3	8	4	4	4	2	2	2	1			36
07				2	1	3	3	6	9	3	3	1	2	2			1	36
08			1	2	3	1	2	5	6	8	2	2	2	2				36
09			1		2	3	5	4	2	4	10	3	2					36
10				1	1	3	3	7	6	4	6	3	2					36
11		1	1	1	2	3	4	4	3	4	2	6	3	1	1			36
Sum		1	4	8	15	17	24	36	35	34	32	20	15	7	3		1	252

Omdannelser i Stoffet under Tørringen, vil dette ogsaa være en Faktor, der kan paavirke Overensstemmelsen mellem Fællesanalyserne.

Tabel 2. Oversigt over Middelfejlen paa Enkeltanalyserne, pCt. Tørstof.

Aar	Runkelroer	Kaalroer	Gulerødder	Turnips
1905	0.020	0.033	0.030	0.033
06	27	35	32	33
07	24	40	31	34
08	31	41	29	34
09	24	31	34	30
10	25	32	24	27
11	29	36	30	39
Middelværdi.....	0.026	0.036	0.030	0.033
Antal Prøver i alt..	420	324	324	252

Afvigelserne i Tabel 1 fordeler sig noget uregelmæssigt for de enkelte Aar, men Summerne forneden slutter sig til den almindelige Fordeling af Afvigelserne fra et Gennemsnitstal, og en mere indgaaende Sammenligning med den Fordeling, der er udtrykt i den ideale Variationskurve, vil ikke være uden Interesse. En saadan Sammenligning anstilles bedst ved at trække Fejlkurven op, men hertil er at bemærke, at den almindelige Fejlkurve er baseret paa en enkelt Gentagelsesrække, bestaaende af et stort Antal Enkeltresultater. Saadanne Gentagelsesrækker med et stort Antal Afvigelser fra et og samme Middeltal findes ikke i det foreliggende Materiale, hvor Middelfejlen er beregnet af mange Gentagelsesrækker, hvoraf hver Række kun indeholder faa — nemlig 3 — Enkeltresultater. Denne Forskel medfører, at Afvigelserne fra Middeltallet af Fællesanalyserne vil være forholdsvis smaa i Sammenligning med Middelfejlen, fordi Middeltallet af 3 Fællesanalyser kan ligge temmelig langt fra den sande Værdi af den søgte Størrelse, praktisk talt fra Middeltallet af et stort Antal Fællesanalyser. Det er dog klart, at denne Formindskelse af Afvigelserne helt igennem maa følge den samme Lov, og Formindskelsen vil derfor være uden Indflydelse paa det indbyrdes

Forhold mellem Afvigelse, det Forhold, der er udtrykt i Fejlkurven. Antallet af de forskellige Afvigelser, ordnede efter Størrelse, maa derfor kunne fremstilles ved en Kurve af samme Natur som den almindelige Variationskurve. Men ved Konstruktionen kan den ved Division med $p(n \div 1)$ fundne Middelfejl ikke benyttes, da den ikke er et direkte Udtryk for Afvigelse, men, som før nævnt, forholdsvis stor i Sammenligning med disse. Middelfejlen eller, som den her bør kaldes, Middelaftvigelsen maa til dette Brug beregnes af

Formlen $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{pn}}$. Materialet kan da behandles som et

Materiale, der stammer fra en og samme Gentagelsesrække, og jævnføres med den almindelige Fejllovstabel. I Stedet for at beregne Middelaftvigelsen direkte ved at dividere Summen af de kvadrerede Afvigelser med deres Antal kan den findes ved at reducere den ved Division med $p(n \div 1)$ fundne Værdi. Kaldes den sidste m_1 og den søgte Værdi m_0 , har man:

$$m_0^2 = m_1^2 \frac{n \div 1}{n} \text{ eller i det foreliggende Tilfælde: } m_0^2 = \frac{2}{3} m_1^2$$

og $m_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} m_1$. Middelaftvigelsen ved de fire Roearter bliver da, naar alle 7 Aar tages under eet:

Runkelroer	0.021	pCt.	Tørstof
Kaalroer	0.029	—	—
Gulerødder	0.025	—	—
Turnips	0.027	—	—

I Tabel 3 er Summerne fra Tabel 1 sammenstillede med de efter Fejlloven beregnede Hyppigheder for de forskellige Afvigelser. De første — altsaa de virkelig fundne Hyppigheder — er trykte med fede Typer. Hvis de respektive Kurver blev trukne op, vilde Runkelroer og Gulerødder give topstøjle Kurver, medens Turnips vilde give en meget regelmæssig og Kaalroerne en mindre regelmæssig Kurve, men i sin Helhed viser Sammenligningen, at Afvigelse beherskes af Fejlloven og fordeler sig paa samme Maade som Materialet ved en almindelig Fejlkurve, der er baseret paa et stort Antal Afvigelser fra eet og samme Gennemsnitstal.

Det har sin Værdi at kende baade Middelfejlen og Middelaftvigelsen (i den her angivne Betydning). Den første er et

Udtryk for Afvigelserne fra den sande Værdi af den søgte Størrelse og kan benyttes ved Bedømmelse af Analyseresultaternes Paalidelighed. Middelafrvigelsen giver derimod Oplysning om, hvor store Afvigelser fra Middeltallet af tre Fællesanalyser, der kan ventes, og kan benyttes ved et Skøn over, hvorvidt enkelte store Afvigelser skyldes særlige Fejlkilder eller ikke, og giver saaledes Holdepunkter for en Afgørelse af, om et Analyseresultat bør kasseres eller ikke. Er Middelafrvigelsen 0.03 pCt. Tørstof, maa en Afvigelse paa 0.06 eller 2 Gange Middelafrvigelsen forekomme i 4—5 Tilfælde af 100 og en Afvigelse paa 0.09 eller 3 Gange Middelafrvigelsen i 2—3 Tilfælde af 1000.

Tabel 3. Fordelingen af Afvigelserne fra Middeltallet af 3 Fællesanalyser (anden Decimal af Tørstofprocenten) sammenstillet med den ideale Fordeling.

	$\frac{\div}{8}$	$\frac{\div}{7}$	$\frac{\div}{6}$	$\frac{\div}{5}$	$\frac{\div}{4}$	$\frac{\div}{3}$	$\frac{\div}{2}$	$\frac{\div}{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Runkelroer.		1 1	2 2	4 5	15 14	22 29	45 50	78 70	90 78	72 70	42 50	25 29	15 14	6 5	2 2	1 1	
Kaalroer ...	1	3 3	11 6	10 10	14 17	19 26	34 35	47 42	47 44	35 42	32 35	30 26	22 17	14 10	4 6	1 3	1 1
Gulerødder.		1 1	3 3	6 7	18 14	20 25	36 38	49 48	59 52	48 48	39 38	21 25	9 14	9 7	4 3	2 1	
Turnips		1 1	4 3	8 7	15 13	17 20	24 28	36 35	35 37	34 35	32 28	20 20	15 13	7 7	3 3		1

Benyttes Middelfejlen som Maal for Analyseresultaternes Paalidelighed, maa det erindres, at Gennemsnittet af de tre Fællesanalyser er det egentlige Analyseresultat. Sættes Middelfejlen paa dette Gennemsnitstal til 0.02 pCt. Tørstof, vil det svare til en Middelfejl paa 0.085 ved de enkelte Analyser eller omtrent, hvad der blev fundet for Kaalroernes Vedkommende. Man har da med Hensyn til det egentlige Analyseresultat, at

i 683 Tilfælde af 1000 vil Fejlen ikke overskride 0.02 pCt. Tørstof,
i 955 — — 1000 — — — — — 0.04 — — ,
i 997 — — 1000 — — — — — 0.06 — — ,

og for Runkelroernes Vedkommende vil Sikkerheden — naar Forholdene stiller sig som i det foregaaende — være noget større. Det er saaledes kun smaa Fejl, det her drejer sig om. Den Fejl, der fremkommer ved Prøveudtagningen af Pulpmassen, er forsvindende i Sammenligning med den Fejl, der skyldes Prøveudtagningen af selve Roerne. Men det er selvfølgelig kun den relative Sikkerhed, der her er Tale om, eller den Sikkerhed, hvormed de indvundne Analyseresultater kan sammenlignes. En konstant Forskel mellem disse og det virkelige Tørstofindhold af Roerne kommer ikke i Betragtning ved disse Beregninger.
