

Om det matematiske Grundlag for Dyrkningsforsøg paa Agermark.

Af E. Lindhard.

Manuskript til en Afhandling om ovenstaaende Emne, men hvori de her benyttede Formler var udledte ad empirisk Vej, har først været udarbejdet af Forfatteren alene. Dette Manuskript har derefter været forelagt for Generalmajor V. H. O. Madsen, som har gennemgaaet samtlige Formler og paavist, hvorledes disse kan udledes matematisk. Denne Del af Arbejdet, der i Teksten er sat i Citationstegn og med mindre Skrift, skyldes saaledes udelukkende V. H. O. Madsen; men indirekte har Bevisførelsens Form desuden medført væsentlige Forandringer i Fremstillingen som Helhed. For den Velvilje og for den meget værdifulde Hjælp, Hr. Generalmajoren her har ydet mig, benytter jeg Lejligheden til at udtale min bedste Tak.

Ved de fleste Markforsøg fremtræder de indvundne Resultater som Gennemsnitstal. De enkelte Størrelser, hvoraf disse Middelværdier kan bygges op, kan indbyrdes variere stærkt paa Grund af Forhold, der oftest er Forsøgets Formaal uvekkommende. Undertiden vil Variationens Virkninger være eliminerede i Gennemsnitstallene, men undertiden influerer de saaledes paa disse, at Forsøgets Resultater bliver upaalidelige. Vort Formaal er her at vinde et Indblik i de Love, hvorefter Variationen forplanter sig gennem de forskellige Middelværdier, som udtrykker Forsøgets Hovedresultater, dog saaledes, at vi begrænser Undersøgelsen til kun at gælde Jordbundens Frugtbare variationsvariationer.

Frugtbareheden, udtrykt ved Størrelsen af den Afgrøde, som samtidig frembringes paa et vist Flademaal, varierer paa ethvert naturligt Areal. Set fra vort Synspunkt kan Variationen i Almindelighed indordnes under tre forskellige Typer:

1) Bølgeformig Variation, der hidrører navnlig fra Jordens Grundbeskaffenhed og Vandstandsforhold og skifter lunefuldt

i jævne og brattere Overgange mellem mere og mindre frugtbar Jord. Paa et Frugtbarhedskort vilde denne Type give Kurver, hvis Forløb kunde illustreres ved Højdekurverne i et Fladenivellement.

2) Agerstrikning, der hidrører fra, at Jorden pløjes i Agre med Ryg og Ren, og fra disse Agres og Halvagres afvigende Behandling og Gødskning i Tidernes Løb.

3) Pletter, herunder alle større og mindre afvigende Partier af Marken, som hidrører fra Overgrundens øjeblikkelige Tilstand, Gødningskraft, Ukrud, Muldvarpe o. s. v.

Til Forsøg søges udvalgt Areal af ensartet Beskaffenhed, og ved stationære Forsøg vil man ofte ved en forudgaaende omhyggelig Dyrkning søge Jorden egaliseret. Navnlig den Variation, der skyldes Gødningspletter, til Dels ogsaa Agerstrikning, vil ved en saadan forudgaaende Dyrkning kunne formindskes betydeligt. Bringes Jorden i høj Kultur og Gødningskraft, vil ogsaa Virkningen af den forskellige Grundbeskaffenhed give sig et mindre Udslag i Afgrødens Størrelse, end hvis Jorden er udpint. Nogen Uensartethed bliver dog altid tilbage, og denne vil i de fleste Tilfælde paa frit beliggende Marker kunne indordnes under disse tre Hovedtyper. Forsøgsmanden har dem alle for Øje, naar han lægger sin Plan.

Forsøget indeholder to eller flere Led, der indbyrdes skal sammenlignes. Det simpleste vilde være at dele det hele Forsøgsareal i saa mange lige store Parceller, som der var Led i Forsøget, og saaledes nøjes med een Parcel for hvert Forsøgsled. Men i et saadant Forsøg vilde al Kontrol med Resultaterne mangle. Det er derfor forlængst blevet Praksis at anvende flere Parceller samtidig i hvert af Forsøgets Led.

Saadanne ens behandlede Parceller kaldes her i Landet: Fællesparceller, i Tyskland o. fl. Lande: Parallelpaceller. Forsøgsarealet deles i lige store, retvinklede firsidede Parceller, hvis Antal sædvanlig er et Multiplum af Forsøgsledenes Antal, saaledes at hvert Led indeholder lige mange lige store Fællesparceller*). Forsøgsplanens Maal er at placere Fællesparcellerne saaledes, at hvert Hold i Gennemsnit faar samme Frugtbarhed som hele Forsøgsarealet og saaledes danner en sand Gennemsnitsprøve af dette.

*) I de efterfølgende Eksempler er dette overalt Tilfældet.

Forsøget anlægges for almindelige Formaal parallelt med Agerens Retning, saaledes at Rammens to Sider og Grænse-linierne mellem de enkelte Parcelrækker falder sammen med Agerren eller Agerryg. Ved denne Foranstaltning vil Agerstribningens forstyrrende Indflydelse paa Forsøget blive stærkt indskrænket. Følgerne af den bølgeformige Variation søges navnlig ophævet ved at anvende mange Fællesparceller og fjerne disse saa langt som muligt fra hverandre. Følgerne af Gødningspletter o. lign. vil man fortrinsvis modvirke ved at øge Parcellernes Størrelse, saaledes at en tilfældig Plets Virkning op eller ned bliver saa lille som mulig i Forhold til Afgrøden paa hele Parcellen.

I Forsøg, hvor Spørgsmaalenes Antal er forholdsvis ringe, anvendes fortrinsvis spredt Parcellfordeling. Denne Forsøgstype skal her undersøges nærmere. Lad i et saadant Forsøg Antallet af Forsøgsled være 5, betegnede: a, b, c, d og e, og Fællesparcellernes Antal for hvert Led ligeledes 5, efterfølgende Plan viser da et Eksempel paa, hvad man under disse Betingelser kunde kalde en ideel Parcellfordeling.

Plan for Parcellfordelingen.

c	b	d	a	c
d	a	c	e	b
c	e	b	d	a
b	d	a	c	e
a	c	e	b	d

Hver Genstand har en Parcel i hver Længderække og en i hver Tværrække. Den enkelte Parcel fra hvert Led, Omkreds-parcellerne undtagne, støder paa hver af sine fire Sider og paa hvert af sine fire Hjørner op til en Parcel fra hvert af de andre fire Led. Samtlige Fællesparceller er for samtlige Forsøgsled indbyrdes fjernede et »Springertræk« fra hinanden.

Vi skal ved Hjælp af nogle simple, konstruerede Eksempler se, hvorledes denne Parcellfordeling vil svare til Formaalet ved Arealer med forskellig Frugtbarhedsfordeling. I Eksem-

plerne tænkes hele Arealet dyrket med samme ensartede Afgrøde og inddelt i Parceller. De i Planerne paa Parcellernes Plads indførte Tal angiver Afgrødens Størrelse. Deles nu samtlige Parceller i Fællesparcelhold, et for hvert tænkt Forsøgsled paa samme Maade som i et virkeligt Forsøg, saa kan man altsaa beregne, hvor store Fejlene fra denne Kilde vilde være blevne, hvis man paa et Areal af netop samme Beskaffenhed som Eksemplets havde indlagt virkelige Forsøg efter den her benyttede Plan, idet man ved, at Udslaget i dette tænkte Forsøg skal være 0. Undersøgelsen omhandler udelukkende saadanne fingerede Forsøg.

Eks. I.

Mark med regelmæssig Frugtbarhedsfordeling.
Forholdstal for Udbytte.

e	b	d	a	c
80	90	100	110	120
d	a	c	e	b
80	90	100	110	120
c	e	b	d	a
80	90	100	110	120
b	d	a	c	e
80	90	100	110	120
a	c	e	b	d
80	90	100	110	120

De enkelte Forsøgsleds Fællesparceller giver følgende Afgrøder:

a	b	c	d	e
80	80	80	80	80
90	90	90	90	90
100	100	100	100	100
110	110	110	110	110
120	120	120	120	120
I Gennemsnit	100	100	100	100

Hele Arealet giver i Gennemsnit en Afgrøde pr. Parcel af 100. Hvert enkelt Forsøgsleds Fællesparceller giver ligeledes

i Gennemsnit 100. Forsøgsgrundlaget er her fejlfrit, og Arealets Beskaffenhed uden Indflydelse paa Forskellen i Udbytte mellem a, b, c, d og e.

Eks. II.

Regelmæssig, men skæv Fordeling.
Forholdstal for Udbytte.

e	b	d	a	c
60	70	80	90	100
d	a	c	e	b
70	80	90	100	110
c	e	b	d	a
80	90	100	110	120
b	d	a	c	e
90	100	110	120	130
a	c	e	b	d
100	110	120	130	140

De enkelte Forsøgsleds Fællesparceller, ordnede efter Størrelse, giver:

a	b	c	d	e
80	70	80	70	60
90	90	90	80	90
100	100	100	100	100
110	110	110	110	120
120	130	120	140	130
I Gennemsnit	100	100	100	100

Ogsaa i Eks. II giver hvert Forsøgsleds Fællesparceller i Gennemsnit 100, men i Modsætning til Eks. I afviger Fællesparcellerne her i nogle Hold meget, i andre kun lidt indbyrdes. I begge disse Tilfælde kunde Frugtbarheden afbildes ved et Skraaplan og, som det vil ses, er Planets Heldningsgrad og Heldningsretning uden Indflydelse paa de forskellige Parcelholds gennemsnitlige Frugtbarhed.

Eks. III.

Skæv og mindre regelmæssig Fordeling.
Forholdstal for Udbytte.

c	b	d	a	c
56	60	68	84	116
d	a	c	e	b
58	64	76	100	120
c	e	b	d	a
62	72	92	122	134
b	d	a	c	e
70	88	126	136	144
a	c	e	b	d
86	130	140	146	150

De enkelte Forsøgsleds Fællesparceller har her givet følgende Afgrøder:

a	b	c	d	e
64	60	62	58	56
84	70	76	68	72
86	92	116	88	100
126	120	130	122	140
134	146	136	150	144
I Gennemsnit 98.8	97.6	104.0	97.2	102.4

Der er i Eks. III en Forskel mellem de enkelte Parcelholds gennemsnitlige Afgrøde, men Forskellen er meget lille i Forhold til Forskellen mellem Fællesparcellerne indbyrdes.

I Eks. IV benytter vi Elementerne fra Eks. III til at vise, hvorledes Forsøget kunde arte sig, hvis Variationen var ubunden. Eks. IV er dannet paa den Maade, at Tallene fra Eks. III først er skrevne ud hver paa sin Seddel. Sedlerne er rullede sammen med Tallene indad, omhyggelig blandede og derpaa tagne op i den Orden, hvori de laa, og indførte Række for Række paa Planen.

Eks. IV.

Tilfældig Frugtbarhedsfordeling.
Forholdstal for Udbytte.

e	b	d	a	c
68	130	134	76	72
d	a	c	e	b
100	92	126	56	60
c	e	b	d	a
70	136	64	140	88
b	d	a	c	e
84	150	122	86	120
a	c	e	b	d
116	144	146	62	58

Fællesparcellerne giver for:

	a	b	c	d	e
	76	60	70	58	56
	88	62	72	100	68
	92	64	86	134	120
	116	84	126	140	136
	122	130	144	150	146
I Gennemsnit	98.8	80.0	99.6	116.4	105.2

Hvor de enkelte Parcelafgrøder, som i dette Eks., varierer uafhængigt af hinanden, er en hvilken som helst Forsøgsplan paa Forhaand lige god: Fællesparcellernes Fordeling over Arealet er ligegyldig. Og hvor Skraaplanet (Eks. I og II) danner Grænse til den ene Side, danner den tilfældige Frugtbarhedsfordeling Grænse til den anden; mellem disse to Yderpunkter vil almindeligt forekommende Tilfælde ligge.

Det vil af disse Eksempler ses, at naar Forandringerne i Frugtbarhed er nogenlunde jævne inden for Forsøgsarealets Ramme, er det muligt ved en fornuftig Forsøgsplan at eliminere største Parten af Markens Ulighed i Frugtbarhed i Fællesparcellernes Gennemsnit. Hvert Hold Fællesparceller er at betragte som en Gennemsnitsprøve af hele Arealet. Jo større Forskellen i Frugtbarhed mellem Arealets forskellige Dele er, desto mere forskellige indbyrdes maa de enkelte Forsøgsleds Fællesparceller være, for at deres Gennemsnit kan blive lig med Markens Gennemsnit.

Det skal nu undersøges nærmere, om denne Paastand er rigtig.

Som Grundlag for Undersøgelsen tænker vi os altsaa Marken dyrket med samme ensartede Afgrøde, inddelt i Parceller og benyttet til fingerede Forsøg, som foran beskrevet. I Forsøget skal Udslaget være 0. Parcellernes samlede Antal og Afgrødens Størrelse paa hver enkelt Parcel er givet, saaledes at det enkelte Forsøg danner en afsluttet Enhed for sig, som illustreret i Eksemplerne. Alle Fejlmuligheder ligger da inden for Forsøgsmarkens Grænser.

Afgrødens Størrelse fra den enkelte Parcel sættes = a ,
 det samlede Antal Parceller i Forsøgsmarken = N ,
 Antallet af Led i Forsøget = ν og
 Antallet af Fællesparceller i hvert Forsøgsled = n .

Samtlige N Parcelafgrøder ordnes i ν Grupper, hver paa n Afgrøder; man har da:

$$\begin{array}{cccc} a'_1 & a''_1 & \dots & a^{\nu}_1 \\ a'_2 & a''_2 & \dots & a^{\nu}_2 \\ & & \dots & \\ a'_n & a''_n & & a^{\nu}_n \end{array}$$

I alt $N = n\nu$ Størrelser. Disse Størrelsers Sum skrives $[a] =$ Summen af alle a 'er (i det følgende benyttes $[]$ overalt som Summationstegn); deres Gennemsnit er $\frac{[a]}{N} = G$, de enkelte Series (Forsøgsleds) Gennemsnit er da:

$$\frac{[a']}{n} = g_1, \dots, \frac{[a^{\nu}]}{n} = g_{\nu}.$$

Betegnes de enkelte Størrelser med Løbenummer 1 til N , har man Differenserne: $a_1 - G = U_1$, $a_2 - G = U_2$, $\dots$, $a_N - G = U_N$. I Forsøg, hvor hvert Led indeholder flere Fællesparceller, optræder Differenser mellem enkelte Parceller og Parcelgennemsnit ikke som Fejl, den enkelte Differens betegner vi derfor: Afvigelse, og Gennemsnittet af alle sammenhørende Differensers Kvadrater betegnes som Middelafrvigelsens Kvadrat. Da U i det givne Tilfælde er en sand Størrelse, idet alle a 'er og G er bekendte, findes $M =$ den sande Middelafrvigelse for hele Systemet af Ligningen $M^2 = \frac{[U^2]}{N}$.

Middelaftvigelsen af den enkelte Serie betegner vi: $m =$ Specialaftvigelsen. Af saadanne Størrelser haves ν , nemlig:

$$m_1^2 = \frac{[V^2]}{n}, \text{ hvor } V'_1 = a'_1 - g_1, V'_2 = a'_2 - g_1, \dots \dots V'_n = a'_n - g_1,$$

$$m_2^2 = \frac{[V''^2]}{n}, \text{ hvor } V'' = a'' - g_2,$$

$$m_{\nu}^2 = \frac{[V^{\nu^2}]}{n}, \text{ hvor } V^{\nu} = a^{\nu} - g_{\nu}.$$

Heraf kan atter dannes en Middelværdi:

$$\mu^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_{\nu}^2}{\nu}.$$

μ betegnes den falske Middelaftvigelse til Adskillelse fra den plausible Middelaftvigelse, som udledes af Størrelserne

$$\frac{[V^2]}{n-1}.$$

Mellem de enkelte Series Gennemsnit, $g_1, g_2, \dots g_{\nu}$, og Markgennemsnittet, G , kan atter dannes Differenser. I Forsøget optræder disse Differenser, da Udslaget skal være 0, som Fejl. Middelværdien af deres Kvadrater betegnes derfor Middelfejlens Kvadrat. Til en given Anordning af Fællesparcellerne i Forsøget svarer en speciel Middelfejl, som betegnes Specialfejlen = M . Man har altsaa:

$$M^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{\nu}^2}{\nu},$$

idet $u_1 = g_1 - G, u_2 = g_2 - G, \dots u_{\nu} = g_{\nu} - G$.

Vi skal først undersøge, hvilken Afhængighed der bestaar mellem Størrelserne

M, μ og M .

Man har: $a'_1 - G = (a'_1 - g_1) + (g_1 - G)$ eller

$$U_1 = V'_1 + u_1 \text{ og altsaa}$$

$$U_1^2 = V'^2_1 + u_1^2 + 2V'_1 u_1 \text{ o.s.v. } U_n^2 = V'^2_n + u_1^2 + 2V'_n u_1$$

$$U_{n+1}^2 = V''^2_1 + u_2^2 + 2V''_1 u_2 \dots U_{2n}^2 = V''^2_n + u_2^2 + 2V''_n u_2$$

$$U_{N-n+1}^2 = V^{\nu^2}_1 + u_{\nu}^2 + 2V^{\nu}_1 u_{\nu} \dots U_N^2 = V^{\nu^2}_n + u_{\nu}^2 + 2V^{\nu}_n u_{\nu}$$

Summeres disse Størrelser, faar man:

$$[U^2] = \begin{Bmatrix} [V'^2] + n u_1^2 + 2 [V'] u_1 \\ + [V''^2] + n u_2^2 + 2 [V''] u_2 \\ + [V\nu^2] + n u_{\nu}^2 + 2 [V\nu] u_{\nu} \end{Bmatrix}$$

Nu er $\frac{[V'^2]}{n} = m_1^2, \dots, \frac{[V\nu^2]}{n} = m_{\nu}^2$ og altsaa

$$\frac{[V'^2] + [V''^2] + \dots + [V\nu^2]}{n\nu} = \mu^2, \text{ da } g - G = u, \text{ er endvidere}$$

$$\frac{n(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{\nu}^2)}{n\nu} = M^2.$$

Summen af Størrelserne, der staar som 3. Led inden for Klammern, er 0, idet $[V'] = [V''] = \dots = [V\nu] = 0$.

Idet $N = n\nu$, faar man ved Division med N :

$$M^2 = \mu^2 + M^2$$

og altsaa

$$\sqrt{M^2 - \mu^2} = M.$$

Anvendes disse Formler paa de foran anførte Eksempler, bliver Resultatet følgende:

Eks. I.

$$M^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{\nu}^2}{\nu} = 0,$$

idet $g_a = g_b = \dots = g_e = G = 100$ og $u = 0$,

$$\begin{aligned} \text{og videre } M^2 &= M^2 - \mu^2 = \frac{[U^2]}{N} \div \frac{[V'^2] + [V''^2] + \dots + [V\nu^2]}{n\nu} \\ &= \frac{5000}{25} \div \frac{1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000}{5 \times 5} = 0. \end{aligned}$$

I Eks. II finder mah ligeledes

$$g_a = g_b = \dots = G \text{ og } M^2 = 0,$$

men

$$\begin{aligned} M^2 &= M^2 - \mu^2 \\ &= \frac{10000}{25} \div \frac{1000 + 2000 + 1000 + 3000 + 3000}{5 \times 5} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Eks. III giver } M^2 = \frac{1.2^2 + 2.4^2 + 4.0^2 + 2.8^2 + 2.4^2}{5} = 7.86.$$

$$\begin{aligned} \text{og } M^2 &= \frac{25304}{25} \div \frac{3572.6 + 5051.4 + 4392.0 + 5876.6 + 6272.4}{5 \times 5} \\ &= 7.38. \end{aligned}$$

I Eks. IV, endelig, har man:

$$M^2 = \frac{1.2^2 + 20.0^2 + 0.4^2 + 16.4^2 + 5.2^2}{5} = 139.52 \text{ og}$$

$$M^2 = \frac{25304}{25} : \frac{1516.8 + 3496.0 + 4491.2 + 5675.2 + 6636.8}{5 \times 5} = 139.52.$$

Da $M < \mathbf{M}$, saa er det en Selvfølge, at naar den procentiske Middelafrvigelse, $\frac{\mathbf{M}}{G} 100$, er lille, vil ogsaa Specialfejlen M være lille i Forhold til Afgrødens Størrelse, selv om Fællesparcellernes Fordeling er mindre gunstig. Det følger heraf, at et ensartet Areal giver de bedste Betingelser for et godt Forsøgsresultat. Men naar Forsøgsarealets Beskaffenhed er givet, da vil Forskellen i Frugtbarhed mellem samtlige Forsøgsleds Parcelgennemsnit og hele Markens Gennemsnit være Minimum, naar det enkelte Forsøgsleds Fællesparcellers indbyrdes Afrvigelse er Maksimum. I øvrigt er Størrelsen af det enkelte Forsøgsleds Specialafvigelse, $m_1, m_2, \dots, m_\nu$, intet Maal for Paalideligheden af det paagældende Parcelgennemsnit. Er t. Eks. g dannet af Fællesparceller, der alle er smaa, alle middelstore eller alle store, saa vil m i disse tre Tilfælde være lille; er derimod g dannet af meget smaa og meget store Fællesparceller, vil m være stor, men g vil i Størrelse ikke være meget forskellig fra Markens Middelafrøde. Altsaa kan en lille Specialafvigelse ikke benyttes som Kriterium for Paalidelighed, og det er uberegtiget at udskyde noget Forsøgsled, fordi dets Specialafvigelse er stor.

Vi har nu undersøgt Specialfejlen for en enkelt given Parcellfordeling, men for at kunne gennemføre Analysen, maa vi kende ogsaa den sande Middelfejl for enhver mulig Fordeling af de givne Forsøgsleds Fællesparceller. Ud fra den Tankegang, at alle Fejlmuligheder ligger inden for det givne Forsøgsareals Grænser, uden Hensyn til om N er et stort eller et lille Tal, vil vi nu søge den Middelfejl $\overline{M}$, hvis Kvadrat er Gennemsnitsværdien af Kvadraterne paa alle Specialfejlen M 's mulige Værdier.

Der er forelagt N Elementer, $a_1, a_2, \dots, a_N$. Deres Gennemsnitsværdi er $\frac{[a]}{N} = G$. Betegner $\mathbf{M}$ Middelafrvigelsen, har man $\mathbf{M}^2 = \frac{[(a-G)^2]}{N}$. Elementerne deles i ν Grupper hver med n Elementer, altsaa er $N = n\nu$.

For hver af de ν Grupper finder man en Gennemsnitsværdi $g^1 = \frac{[a]_1^n}{n}$. Betegnes de ν Gennemsnitsværdier $g^1, g^2, \dots, g^\nu$, faar man:

$$g^1 + g^2 + \dots + g^\nu = \frac{[a]_1^N}{n}.$$

Tages dernæst Differensen mellem hver af disse Gennemsnitsværdier og G , kan der dannes Gennemsnit af disse Differensers Kvadrater. Kaldes dette Gennemsnit M_1^2 , har man:

$$M_1^2 = \frac{(g^1 - G)^2 + (g^2 - G)^2 + \dots + (g^\nu - G)^2}{\nu}.$$

Man kan dernæst ordne de N Elementer i andre Grupper med n i hver.

Spørges der, hvor ofte man kan udtage n Genstande blandt N for at faa en fra de øvrige forskellig Gruppe, er Svaret:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

For hver saadan Gruppe maa der fremdeles spørges, om det Antal Maader, hvorpaa alle de tilbageværende $N-n$ Elementer kan ordnes i Grupper paa n , der er indbyrdes forskellige. Det skal da først bemærkes, at der af 2. Gruppe af n Elementer blandt $N-n$ kan dannes

$$\frac{(N-n)(N-n-1)\dots(N-2n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Derefter er der hver Gang tilbage $N-2n$. Antallet af Maader, hvorpaa der heraf kan dannes en Gruppe paa n , er

$$\frac{(N-2n)(N-2n-1)\dots(N-3n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Dette er altsaa Antallet af Maader, hvorpaa 3. Gruppe kan dannes.

Saaledes fortsættes, indtil man for den sidste Gruppe, den ν , finder Antallet af Maader, hvorpaa der til denne kan udtages n Elementer:

$$\begin{aligned} & \frac{(N-(\nu-1)n)(N-(\nu-1)n-1)\dots(N-(\nu-1)n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \\ &= \frac{(N-(\nu-1)n)(N-(\nu-1)n-1)\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = 1, \text{ idet } N = n\nu. \end{aligned}$$

Altsaa er det samlede Antal af Maader, hvorpaa der kan dannes indbyrdes forskellige Sæt af ν Grupper med n i hver:

$$\frac{[N]}{([n]^\nu)}.$$

Men dersom man ikke sonder mellem de Tilfælde, der kun er forskellige derved, at Grupperne er ombyttede (f. Eks. 1. og 2. Gruppe), saa skal det fundne Antal divideres med alle de Maader, hvorpaa ν Grupper kan ombyttes indbyrdes. Dette Antal er $[\nu]$, og altsaa bliver det søgte Antal

$$r = \frac{[N]}{[\nu] \cdot ([n]^\nu)}.$$

Da nu det hele Antal af Maader, hvorpaa der kan dannes Dobbelt-produkter af N Elementer er $\frac{N(N-1)}{1 \cdot 2}$, saa forekommer $2[a_i a_k]$ et Antal Gange lig

$$\frac{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \nu \tau}{\frac{N(N-1)}{1 \cdot 2}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \cdot \nu \tau = \frac{n-1}{N-1} \tau = \sigma. *)$$

*) »Naar 2 Elementer, f. Eks. a_1 og a_2 , er i samme Gruppe, f. Eks. 1., bliver Antallet af 1. Grupper, der kan dannes:

$$\frac{(N-2)(N-3) \dots (N-n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-2)},$$

Antallet af 2. Grupper

$$\frac{(N-n)(N-n-1) \dots (N-2n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \text{ og}$$

Antallet af ν . Grupper

$$\frac{(N-(\nu-1)n)(N-(\nu-1)n-1) \dots (N-(\nu n)+1)}{1 \cdot 2 \dots n},$$

altsaa ialt

$$\frac{|N-2|}{|n-2| \cdot (|n|)^{\nu-1}}.$$

Men de $\nu-1$ Grupper kan dannes af hinanden ved Ombytning $| \nu-1 |$ Gange. Altsaa bliver det hele Antal af forskellige Ordninger med a_1 og a_2 i samme Gruppe:

$$\frac{|N-2|}{| \nu-1 | \cdot |n-2| \cdot (|n|)^{\nu-1}}.$$

Tages dernæst a_1 i 1. og a_2 i 2. Gruppe, har man af 1. Grupper

$$\frac{(N-2)(N-3) \dots (N-n)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \text{ og}$$

af 2. Grupper $\frac{(N-n-1)(N-n-2) \dots (N-2n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)}.$

Den 3. Gruppe dannes paa

$$\frac{(N-2n)(N-2n-1) \dots (N-3n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \text{ Maader,}$$

og saaledes fortsættes indtil den ν . Gruppe, der kun dannes paa

$$\frac{(N-(\nu-1)n)(N-(\nu-1)n-1) \dots (N-\nu n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} = 1 \text{ Maade.}$$

Altsaa i alt

$$\frac{|N-2|}{(|n-1|)^2 (|n|)^{\nu-2}}.$$

Men da alle de ens Kombinationer af de $\nu-2$ Grupper er til Stede i et Antal af $| \nu-2 |$, udkommer som Antallet af Ordninger med a_1 og a_2 i forskellige Grupper

$$\frac{|N-2|}{| \nu-2 | (|n-1|)^2 (|n|)^{\nu-2}}.$$

Følgelig er $[[g^2]] = \frac{1}{n^2} \left\{ \tau[a^2] + 2[a_1 a_k] \frac{n-1}{N-1} \tau \right\}$.

Men $[a] = NG$, altsaa $[a^2] + 2[a_1 a_k] = N^2 G^2$.

Fremdeles er $NM^2 = [(a-G)^2] = [a^2] \div 2G[a] + NG^2 = [a^2] - NG^2$.

Altsaa $[a^2] = N(M^2 + G^2)$; $2[a_1 a_k] = N^2 G^2 - N(M^2 + G^2)$.

Derfor bliver $[[g^2]] = \frac{\tau}{n^2} \left\{ NM^2 + NG^2 + \frac{n-1}{N-1} N(N-1)G^2 \div \frac{n-1}{N-1} NM^2 \right\}$
 $= \frac{\tau N}{n^2} \left\{ \frac{N-n}{N-1} M^2 + nG^2 \right\} = \tau \nu \left\{ \frac{\nu-1}{N-1} M^2 + G^2 \right\}.$

$$[\overline{M}]^2 = \frac{[[g^2]]}{\tau \nu} - G^2 = \frac{\nu-1}{N-1} M^2 \text{ eller } \frac{[\overline{M}]^2}{\nu-1} = \frac{M^2}{N-1}.*)$$

V. H. O. Madsen. «

I Tilknytning til ovenstaaende matematiske Udvikling skal vi ved Hjælp af et Eksempel illustrere Variationens Forplantning gennem Middeltallene, idet vi hertil vælger en saa lille Mark, at alle Kombinationer let lader sig overse.

Summen af disse 2 Antal bliver:

$$\begin{aligned} & \frac{|N-2|}{|\nu-2| \cdot |n-2| \cdot (|n|)^{\nu-2}} \left\{ \frac{1}{(\nu-1) \cdot |n|} + \frac{1}{(n-1) \cdot |n-1|} \right\} \\ &= \frac{|N-2|}{|n| \cdot |n-2| \cdot |\nu-2| \cdot (|n|)^{\nu-2}} \left\{ \frac{1}{(\nu-1)n} + \frac{1}{n-1} \right\} \\ &= \frac{|N-2| \cdot (N-1)}{|\nu-1| \cdot |n-1| \cdot (|n|)^{\nu-1}} = \frac{\nu |N-1|}{\nu |\nu-1| \cdot (|n|)^{\nu-1} \cdot |n-1|} = \frac{|N|}{\nu (|n|)^{\nu}}, \end{aligned}$$

som er det samme Tal τ , som tidligere er funden direkte.

Man skal altsaa have:

$$\frac{|N-2|}{|\nu-1| \cdot |n-2| \cdot (|n|)^{\nu-1}} = \sigma, \quad (A)$$

idet

$$\sigma = \frac{n-1}{N-1} \tau, \text{ og } \tau = \frac{|N|}{\nu (|n|)^{\nu}},$$

$$\text{altsaa } \sigma = \frac{n-1}{N-1} \cdot \frac{|N|}{\nu (|n|)^{\nu}} = \frac{(n-1)N \cdot |N-2|}{\nu |\nu-1| \cdot |n| \cdot (|n|)^{\nu-1}}.$$

$$N = n\nu; \quad \sigma = \frac{|N-2|}{|\nu-1| \cdot |n-2| \cdot (|n|)^{\nu-1}},$$

som netop stemmer med Formel (A), hvorved altsaa Regningen er verificeret.

V. H. O. Madsen. «

*) Af den plausible Middelfavgivelse finder man den plausible Middelfejl ved Division med $\sqrt{n}$, medens ovenstaaende Ligning giver

$$\frac{M}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = [\overline{M}],$$

hvor altsaa M er den sande Middelfavgivelse og $[\overline{M}]$ den sande Middelfejl.

Eks. V.

En Mark har 4 Parceller, der giver følgende Afgrøde:

6	10
8	16

$$\begin{array}{rcl}
 & & \begin{array}{cc} U & U^2 \end{array} \\
 6 \div 10 & = & \div 4 \quad 16 \\
 8 \div 10 & = & \div 2 \quad 4 \\
 10 \div 10 & = & \div 1 \quad 1 \\
 16 \div 10 & = & \div 6 \quad 36 \\
 \hline
 G = 10 & & M^2 = 14
 \end{array}$$

De 4 Parceller deles i 2 Hold, hver med 2 Fællesparceller, man har da: $N=4$, $\nu=2$ og $n=2$. Middelfejlen $\overline{M}$ er bestemt ved $\overline{M}^2 = M^2 \frac{\nu-1}{N-1} = 14 \times \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$.

Antallet af mulige Forsøgsplaner er:

$$r = \frac{N}{\nu (n)^\nu} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 (2 \cdot 1)^2} = 3.$$

Disse 3 Forsøgsplaner fremkommer ved:

- 1) Sammenlægning af Parcellerne 2 og 2 paa langs,
- 2) do. - do. 2 og 2 paa tværs,
- 3) do. - do. 2 og 2 paa skraa.

I det enkelte Tilfælde findes:

- 1) $g'_1 = 7$, $g'_2 = 13$, $\mu_1^2 = 5$ og $M_1^2 = 9$,
- 2) $g''_1 = 8$, $g''_2 = 12$, $\mu_2^2 = 10$ og $M_2^2 = 4$,
- 3) $g'''_1 = 9$, $g'''_2 = 11$, $\mu_3^2 = 13$ og $M_3^2 = 1$.

$$\text{Heraf } \overline{M}^2 = \frac{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}{3} = \frac{9 + 4 + 1}{3} = \frac{14}{3} \text{ eller}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{M}^2 &= M^2 - \overline{\mu}^2 = M^2 - \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{3} = 14 - \frac{5 + 10 + 13}{3} \\
 &= \frac{14}{3}.
 \end{aligned}$$

Paa Grundlag af den matematiske Analyse skal vi forsøge at klarlægge den almindelige Betydning af Parcellernes Antal og Størrelse.

I vore Eksempler I til IV, hvor $N=25$, $n=\nu=5$, er Antallet af mulige Forsøgsplaner meget stort, idet

$$r = \frac{25}{5 (5)^5} \text{ er et Tal, der skrives med 13 Cifre. Hele}$$

denne lange Række af mulige Værdier for Specialfejlen forholder sig paa tilsvarende Maade som de 3 Værdier i Eks. V.

Den laveste er 0 eller i Nærheden af 0, den højeste **M** eller i Nærheden af **M**. Den første indtræder, naar μ er Maksimum, den sidste, naar μ er Minimum. Men disse Værdier er langtfra lige sandsynlige. Arealets Beskaffenhed i Forbindelse med Forsøgsplanen er afgørende for, hvilken der vil blive realiseret.

Tænker man sig et lige stort Areal benyttet til hvert Forsøgsled, og i det ene Tilfælde samlet til een Parcel, idet n Naboparceller lægges sammen til een, men i det andet Tilfælde delt i n Fællesparceller, fordelt med Maksimumsafstand indbyrdes, saa vil disse to forskellige Forsøgsplaner give Specialfejl, som repræsenterer hver sin Ende af Skalaen for de mulige Værdier af **M**. Hvor nær Fejlen for den store Parcel kommer til **M**, og hvor nær Fejlen paa Fællesparcellernes Gennemsnit kommer til 0, afhænger blandt andet af Forsøgsarealets Beskaffenhed. Jo mere Jordens Variation i Frugtbarhed nærmer sig Skraaplanet (Eks. I og II), jo jævner Overgangen fra Parcel til Parcel er, og jo større Forskellen er fra den ene Ende af Forsøgsarealet til den anden, desto større er Fordelen ved at øge Parcellernes Antal paa Størrelsens Bekostning. Og omvendt, jo mere tilfældig og plettet Frugtbarheden fordeler sig, desto mindre er Fordelen. Heraf følger den praktiske Regel: at gøre Parcellerne store, naar Jorden er meget variabel. Parcelstørrelsen kan med samme Areal til Raadighed altid med Fordel øges noget ud over den Grænse, man ved fingerede Forsøg maatte finde fordelagtigst, idet Betydningen af Arbejdsfejl og Omkredsfejl aftager, naar Størrelsen tiltager, desuden indskrænkes Arbejdet ved Forsøget.

Ogsaa Parcellens Form kan øve Indflydelse paa Fejlens Størrelse. Den kvadratiske Parcel byder den Fordel, at Omkredsfejlen er mindre end ved nogen anden firsidet Parcel af samme Størrelse. Er Jorden kendelig agerstribet, vil det imidlertid være hensigtsmæssigt at gøre Parcellen rektangulær med sin største Længde tværs paa Agerretningen. Aarsagen hertil er, som det vil fremgaa af det foregaaende, den, at naar Forskellen øges inden for den enkelte Parcells Grænser, saa aftager Forskellen mellem Parcellerne indbyrdes. Vi skal belyse dette Forhold ved et Eksempel, denne Gang hentet fra Prøvevejninger i en stærkt agerstribet Bygmark ved Aarslev Forsøgsstation.

Eks. VI.

Bygmark, Forholdstal pr. Arealenhed for hele Afgrødens Størrelse.

A.
Hver Parcel for sig.

123	69	112	72
123	75	118	80
123	75	123	81
131	79	123	93

$$M^2 = 520$$

B.
Parcellerne slaaede sammen to og to paa tværs.

96	92
99	99
99	102
105	108

$$M_t^2 = 22$$

C.
Parcellerne slaaede sammen to og to paa langs.

123	73	115	76
127	77	123	87

$$M_l^2 = 508.75$$

Under Skemaerne B og C er opført den direkte udledte Specialfejl, desuden er

$$M_t^2 = M^2 - \mu_t^2 = 520 \div 498 = 22 \text{ og}$$

$$M_l^2 = M^2 - \mu_l^2 = 520 \div 11.25 = 508.75.$$

Vi har udelukkende beskæftiget os med fingerede Forsøg, i hvilke Udslaget er = 0 og følgelig Forskellen mellem Forsøgets enkelte Led og Markens Middel = Fejl. Realiseres nu Forsøget, saaledes at de enkelte Forsøgsled bliver underkastede forskellig Paavirkning, saa lader Middelfavgigelsens og Specialfejls sande Størrelse M og M sig ikke længere bestemme.

Er ν et meget lille Tal, f. Eks. 2, og n et stort Tal, saa kan man ved jævn og gradvis Variation gaa ud fra, at største Parten af Variationen er elimineret i Gennemsnitstallene; men vokser ν , og aftager n , saa vokser ogsaa Fejlmulighederne, men en rationel Fejlberegning er udelukket. Man kan vel paa

Grundlag af Fællesparcellernes plausible Middelfavgivelse $\frac{[V^2]}{n-1}$,

bestemme den plausible Middelfejl (se Fodnote Side 351), men denne Størrelse er et meget upaalideligt Maal for Middelfejlen paa de enkelte Fællesparcel-Gennemsnits Forskel fra Markens sande Middel.

Paa denne Vanskelighed bøder *Bastian R. Larsens* Maalestokmetode. Hver tredje eller hver anden af alle Forsøgets Parceller dyrkes her med samme Genstand, der da tjener som Maalestok i Forsøget. Denne Parcelanordning tillader en Opførelse efter Forskelsmetoden, hvorved hver enkelt Parcel fra hvert enkelt Forsøgsled sammenlignes direkte med de omkring-

liggende Maaleparceller. Man faar saaledes for hvert Forsøgsled lige saa mange smaa Parallelforsøg, som der er Fællesparceller i Forsøget. Og kun Forskellen i Frugtbarhed mellem de sammenlignede Naboparceller influerer paa Forsøgets Resultater. Det er herved muligt at maale Fejlen i Forsøget i Tilfælde, hvor dette ved spredt Parcellfordeling er helt eller delvis udelukket. Men denne Forsøgsmetode er nærmere begrundet af *G. Holtmark**) og skal ikke behandles her.

I den foran citerede Afhandling (Side 338 o. flg.) har *G. Holtmark* behandlet Spørgsmaalet om Parcelstørrelsens Indflydelse paa den specielle Middelfejl. Han deler Marken i smaa Parceller og adderer Afgroderne fra disse 2 og 2 for derpaa at undersøge »Fejlen« paa Parceller af den dobbelte Størrelse. Den »teoretisk beregnede Middelfejl« paa to saadanne Naboparcellers Sum udleder han af Formlen $\sqrt{2m^2 + \mu^2}$, hvor $m = M$ = Middelafrvigelsen for hele Arealet og μ = Middelforskellen mellem 2 og 2 Naboparceller. Forudsætningen her er altsaa den, at Dobbeltparcellens Middelfejl vokser, naar Middelforskellen mellem de 2 enkelte Parceller, hvoraf den opbygges, øges. For at kunne afgøre, om den heri indeholdte Paastand er rigtig, maa vi først undersøge, hvilket Forhold der bestaar mellem Middelforskellen og de foran benyttede Udtryk for Middelafrvigelse og Middelfejl.

»Middelafrvigelsen er bestemt ved $M = \sqrt{\frac{[U^2]}{N}}$.

Ordnes de N Elementer $a_1, a_2, \dots, a_N$, efter aftagende Størrelse, kan man danne de positive Differenser:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 - a_2 & a_1 - a_3 & a_1 - a_4 & \dots & a_1 - a_{N-1} & a_1 - a_N \\ & a_2 - a_3 & a_2 - a_4 & \dots & a_2 - a_{N-1} & a_2 - a_N \\ & & a_3 - a_4 & \dots & a_3 - a_{N-1} & a_3 - a_N \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & a_{N-2} - a_{N-1} & a_{N-2} - a_N \\ & & & & & a_{N-1} - a_N \end{array}$$

Gennemsnittet af de N Elementer er $\frac{[a]}{N} = G$ og Afrvigelserne fra dette, $U = a - G$, er

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_N \\ \text{for} & & & & & & & & \\ \text{henholdsvis} & U_1 & U_2 & U_3 & \dots & U_N \end{array}$$

*) *G. Holtmark* og *Bastian R. Larsen*: »Om muligheder for at indskrænke de fejl, som ved markforsøg betinges af jordens uensartethed«. Tidsskrift for Landbrugets Planteavl, 12. Bind, Side 330.

Herefter er altsaa $a_1 - a_2 = U_1 - U_2$, $a_1 - a_3 = U_1 - U_3$ o. s. v.,
følgelig kan man i Stedet for ovenstaaende danne følgende Skema
over Differenserne:

$$\begin{array}{ccccccc} U_1 - U_2, & U_1 - U_3, & U_1 - U_4, & \dots & U_1 - U_{N-1}, & U_1 - U_N \\ & U_2 - U_3, & U_2 - U_4, & \dots & U_2 - U_{N-1}, & U_2 - U_N \\ & & U_3 - U_4, & \dots & U_3 - U_{N-1}, & U_3 - U_N \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & U_{N-2} - U_{N-1}, & U_{N-2} - U_N \\ & & & & & & U_{N-1} - U_N \end{array}$$

Disse Differenser betegnes d , deres Antal er $\frac{N(N-1)}{2}$; herefter

$$\text{er Middelforskellen for hele Systemet} = \sqrt{\frac{[d^2]}{\frac{N(N-1)}{2}}}.$$

Kvadreres Differenserne, faar man:

$$[d^2] = (N-1) [U^2] - 2 [U_i U_k], \quad (i > k),$$

$$\text{men } [U]^2 = 0 = [U^2] + 2 [U_i U_k],$$

altsaa $[d^2] = N [U^2]$; følgelig er:

$$\frac{[d^2]}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{N [U^2]}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{[U^2]}{N} \times \frac{2N}{N-1} = M^2 \frac{2N}{N-1} = M_{d^2}^{2,*})$$

Til hver af de øvrige Værdier af Middelforskel og Middelfejl svarer en Middelforskel, der kan udledes paa tilsvarende Maade, idet man for U sætter V eller u og for N sætter n eller ν ; man har altsaa:

$$M_{d^2}^2 = M^2 \frac{2N}{N-1},$$

$$m_{d^2}^2 = m^2 \frac{2n}{n-1},$$

$$\mu_{d^2}^2 = \mu^2 \frac{2n}{n-1},$$

$$\text{idet } \frac{m_1^2 \frac{2n}{n-1} + m_2^2 \frac{2n}{n-1} + \dots + m_{\nu}^2 \frac{2n}{n-1}}{\nu} = \mu^2 \frac{2n}{n-1},$$

$$M_{d^2}^2 = M^2 \frac{2\nu}{\nu-1} \text{ og}$$

$$[M]_{d^2}^2 = [M]^2 \frac{2\nu}{\nu-1},$$

$$\text{hvor } \frac{M_1^2 \frac{2\nu}{\nu-1} + M_2^2 \frac{2\nu}{\nu-1} + \dots + M_{\nu}^2 \frac{2\nu}{\nu-1}}{\nu} = [M]^2 \frac{2\nu}{\nu-1}.$$

*) Forfatteren til denne Udvikling, der er overladt mig af V. H. O. Madsen, er mig ubekendt. E. L.

Vi kan nu begynde at analysere *Holtmarks* Formel. Han angiver 2 Naboparcellers Sum til $2 G \pm \sqrt{2 m^2 + \mu^2}$ (Side 239 i den citerede Afhandling) eller med vore Benævnelser:

$$2 G \pm \sqrt{2 \mathbf{M}^2 + (\mu)_d^2} \text{ eller } 2 G \pm \sqrt{2 \mathbf{M}^2 + (\mu)^2} \frac{2 n}{n-1}, n = 2,$$

altsaa bliver Spillerummet $\sqrt{2 \mathbf{M}^2 + 4 (\mu)^2}$. Dette er, siger *Holtmark*, Middelfejlen paa Afrøden fra 2 Parceller; omregnes denne Størrelse i Forhold til Afrøden fra 1 Parcel, har man:

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 \mathbf{M}^2 + 4 (\mu)^2} \text{ eller } \sqrt{\frac{\mathbf{M}^2}{2} + (\mu)^2}.$$

$(\mu)^2$ er her en Middelværdi, der dannes af de 4 Størrelser: μ_1^2 , μ_2^2 , μ_3^2 og μ_4^2 , se nedenfor.

I det specielle Tilfælde, hvor denne Formel anvendes, er de enkelte Parceller placerede i Marken som følger:

$$\begin{array}{ccccccc} a'_1 & a'_2 & . & . & . & a'_{e-1} & a'_e \\ a''_1 & a''_2 & . & . & . & a''_{e-1} & a''_e \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a^{s-1}_1 & a^{s-1}_2 & . & . & . & a^{s-1}_{e-1} & a^{s-1}_e \\ a^s_1 & a^s_2 & . & . & . & a^s_{e-1} & a^s_e \end{array}$$

s og e er begge lige Tal, s e = N og n = 2.

Dobbeltparceller kan her dannes paa 4 forskellige Maader, nemlig:

- 1) $[a_1 + a_2, a_3 + a_4, . . . a_{e-1} + a_e]_1^s$. Alle Parceller indgaar.
- 2) $[a' + a'', a''' + a''', . . . a^{s-1} + a^s]_1^e$. do. do. do.
- 3) $[a_2 + a_3, . . . a_{e-2} + a_{e-1}]_1^s$. 2 Yderrækker lades ude.
- 4) $[a'' + a''', . . . a^{s-2} + a^{s-1}]_1^e$. do. do. do.

I hvert af disse 4 Tilfælde kan man finde den sande Middelfavgivelse, $\mathbf{M}$, som vi her vil betegne $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ og $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_1$ er da lig $\mathbf{M}_2$, medens $\mathbf{M}_3$ og $\mathbf{M}_4$, der er dannet af de tiloversblevne Observationer, efter at henholdsvis 2 s og 2 e Enkeltobservationer er udeladte af Regningen, kan have en afvigende Værdi. Af disse 4 Størrelser kan atter dannes en Middelværdi:

$$(\mathbf{M})^2 = \frac{N \mathbf{M}_1^2 + N \mathbf{M}_2^2 + (N - 2 e) \mathbf{M}_3^2 + (N - 2 s) \mathbf{M}_4^2}{4 \left(N - \frac{e + s}{2} \right)}$$

Af μ kan i de 4 Tilfælde dannes tilsvarende Værdier, og heraf findes Middelværdien

$$(\mu)^2 = \frac{\nu \mu_1^2 + \nu \mu_2^2 + (\nu - e) \mu_3^2 + (\nu - s) \mu_4^2}{4 \left(\nu - \frac{e + s}{4} \right)}$$

Paa tilsvarende Maade dannes en Middelværdi af Specialfejls 4 Værdier:

$$(M)^2 = \frac{\nu M_1^2 + \nu M_2^2 + (\nu - e) M_3^2 + (\nu - s) M_4^2}{4 \left(\nu - \frac{e + s}{4} \right)}$$

Da nu

$$\begin{aligned} M_1^2 - \mu_1^2 &= M_1^2, \\ M_2^2 - \mu_2^2 &= M_2^2, \\ M_3^2 - \mu_3^2 &= M_3^2 \text{ og} \\ M_4^2 - \mu_4^2 &= M_4^2, \end{aligned}$$

saa er følgelig $(M)^2 - (\mu)^2 = (M)^2$, idet $\nu = \frac{N}{2}$.

Men *Holtmark* forudsætter $\frac{M^2}{2} + (\mu)^2 = M^2$, hvilket altsaa er galt, og den Overensstemmelse, han finder (Side 341 i den citerede Afhandling) mellem »Middelfejl beregnet direkte« og »teoretisk«, beror paa en Tilfældighed.

Sammenstilles de to Formler, idet man for $(\mu)^2$ sætter μ^2 , har man:

	for $\sqrt{\frac{M^2}{2} + \mu^2}$	$\sqrt{M^2 - \mu^2}$	
ved $\mu = 0$	$\frac{M}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$	M	$= M$
$\mu = \frac{M}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$	$\frac{M}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$	$\frac{M}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$	$= M$
$\mu = M$	$M \sqrt{1\frac{1}{2}}$	0	$= M$

Naar μ afsættes som Abscisse og M som Ordinat, giver altsaa disse to Formler forskellige Kurver, som skærer hinanden ved $\mu = M \sqrt{\frac{1}{4}}$. For Middelværdierne faar Kurverne samme Forløb, men Skæringspunktet kan forskydes en Del, naar Middelværdien (μ) indføres i samme Formel som Enkeltværdierne M og M . *Holtmarks* Tilfælde har ligget saa nær dette Skæringspunkt, at den forkerte Formel har givet et tilnærmelsesvis rigtigt Resultat.