STATENS PLANTEAVLSFORSØG

BERETNING NR. S 1499

STATISTISK ANALYSE AF DATA FRA SELVSTÆNDIGHEDS- OG ENSARTETHEDSUNDERSØGELSER AF SORTER

KRISTIAN KRISTENSEN

DATAANALYTISK LABORATORIUM

1980

TIDSSKRIFT FOR PLANTEAVLS SPECIALSERIE

STATENS PLANTEAVLSFORSØG

BERETNING NR. S 1499

STATISTISK ANALYSE AF DATA FRA SELVSTÆNDIGHEDS - OG ENSARTETHEDSUNDERSØGELSER AF SORTER

KRISTIAN KRISTENSEN

DATAANALYTISK LABORATORIUM

1980

TIDSSKRIFT FOR PLANTEAVLS SPECIALSERIE

F o r o r d

Denne afhandling er skrevet som et licentiatprojekt ved Den kgl. Veterinær- og Landbohøjskole med hovedfag i Matematisk statistik og med professor Mats Rudemo som hovedfaglærer.

Opgaven indeholder først en indledning med baggrund for forsøgene samt en beskrivelse af de hidtil anvendte opgørelses- og testmetoder. Derefter følger del 2 og 3, som behandler selvstændigheds- og ensartethedsundersøgelserne ud fra visse generelle betragtninger. Mange af disse kapitlers afsnit kan overspringes af læseren ved en første gennemlæsning. Det gælder især afsnittene 2.1.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 og 2.3.5.

Derefter følger 4. del, hvor det foreliggende datamateriale for kogeærter er behandlet - i det væsentlige på grundlag af de i del 2 og 3 fremsatte betragtninger.

Til sidst er der en kortfattet gennemgang af konklusioner.

For at lette læsningen for den ikke statistisk interesserede læser, er en del beviser og udredninger samlet i appendix A. På de steder, hvor disse er benyttet i teksten, vil der være en henvisning til de pågældende sider i appendixet. I almindelighed vil det være muligt at undlade læsning af delene i appendix A, uden at dette går ud over forståelse og sammenhæng. Derimod vil det næppe være muligt at læse dele af appendixet med fuldt udbytte, hvis man ikke samtidig læser de dele af hovedteksten, hvortil de hører.

Hvert symbol er så vidt muligt kun anvendt i en bestemt betydning. I appendix B er givet en liste over de fleste af de anvendte symboler, idet symboler, som kun er anvendt et enkelt sted, ikke er medtaget. Foruden en kort beskrivelse af symbolets betydning er der henvisning til en side (normalt den første), hvor symbolet er anvendt. Ved senere anvendelse af symbolet i samme betydning, er forklaringen ofte gjort meget kort.

Tabeller, figurer og formler er nummereret fortløbende i hvert hovedafsnit. Eksempelvis angiver tabel 2.1.1 den første tabel i hovedafsnit 2.1, mens (3.2.2) angiver den anden formel i hovedafsnit 3.2.

De beregninger, som er udført i forbindelse med projektet, er for hovedparten foretaget ved hjælp af programpakken: Statistical Analysis System - herunder det tilhørende matrix programmeringssprog. Desuden er nogle beregninger programmeret i FORTRAN. Alle beregninger er udført på NEUCC, Det Regionale EDB-Center ved Danmarks tekniske Højskole.

For kritisk gennemlæsning af manuskript samt kommentarer og råd ved opgavens løsning rettes en tak til instituttets medarbejdere, især professor Mats Rudemo, lektor Poul Einar Hansen og vid.ass. Søren Andersen samt til vid.ass. Poul Flengmark, Statens forsøgsstation, Roskilde, stipendiat J.C. Streibig samt kolleger ved Dataanalytisk Laboratorium.

Desuden vil jeg sige tak til afdelingsbestyrer K. Sandvad, for at det har været muligt for mig at færdiggøre opgaven, efter at jeg en genindtrådt i en stilling på Dataanalytisk Laboratorium.

Det benyttede datamateriale er stillet til rådighed af forstander Poul Rasmussen og vid.ass. Poul Flengmark, Statens forsøgsstation, Roskilde.

Renskrivning er udført af sekretærerne Lene Kofoed-Hansen, Institut for Matematik og Statistik, og Tove Hagerup, Dataanalytisk Laboratorium. EDB-medarbejder Michael Hoffmann har udført programmeringsarbejdet i forbindelse med rentegning af figurerne.

april 1980

Kristian Kristensen

Indhold.

1. INDLEDNING

I en række lande udføres hvert år sortsforsøg med det formål at undersøge, om sorter - anmeldt henholdsvis til sortslisteoptagelse og nyhedsbeskyttelse - er selvstændige, ensartede og stabile. Undersøgelserne foretages for en lang række arter. I Danmark udføres disse forsøg ved forsøgsstationerne Tystofte og Roskilde samt ved Havebrugscentret - alle under Statens Planteavlsforsøg.

Forsøgenes omfang varierer meget fra planteart til planteart. Omfanget bestemmes dels af det antal karakterer, der skal registreres og dels af antal anmeldte sorter og antal referencesorter. Referencekollektionens størrelse er afhængig af afprøvningens formål (sortslisteoptagelse og/eller nyhedsbeskyttelse), men er for landbrugsplanternes vedkommende normalt sorter på national og/eller EEC-sortsliste samt enkelte andre sorter. Da alle sortsejere (planteforædlere) kan anmelde det antal sorter til afprøvning, de ønsker, vil antallet af anmeldte sorter kunne variere stærkt fra år til år.

1.1 FORMÅL MED AFPRØVNINGERNE

Formålet med at afprøve alle nye sorter for selvstændighed, ensartethed og stabilitet, før de optages på listen over de sorter, der kan certificeres, er at sikre forbrugeren en sortsægthed samt beskytte sortsejerens rettighed over sorten. I tilfælde af sortens nyhedsbeskyttelse har sortsejeren desuden ret til at opkræve en forædlerafgift. Sortsejeren afgører selv, om han vil have sorten nyhedsbeskyttet, hvorimod den skal afprøves efter EEC's regler - såfremt pågældende planteart er inddraget i EEC's sortslistedirektiv - før den kan certificeres. Afprøvningerne er lovbundne, hvilket dels skyldes Danmarks tiltræden af UPOV (Union Internationale pour la Protection des Obtentions Vetales) den 5. september 1968 (Plantenyhedsbeskyttelse) og dels er en følge af Danmarks indtræden i EEC (European Economic Community) den 1. januar 1973 (sortslisteoptagelse).

1.1.1. UPOV

Reglerne her tager sigte på at beskytte forædlernes rettigheder og kan i nogen grad sammenlignes med patentrettigheder. Sorter fra ca. 50 arter kan på nuværende tidspunkt anmeldes til beskyttelse af forædlerrettigheder, men antallet af arter udvides stadig. For at en ny sort kan beskyttes i henhold til denne lov skal sorten være:

I. Selvstændig
II. Ensartet
III. Stabil.

I. Selvstændig

"En ny sort skal være klart adskillelig i en eller flere væsentlige karakterer fra alle andre sorter, hvis eksistens er almindelig kendt på det tidspunkt, hvor sorten anmeldes til beskyttelse. En ny sort kan være defineret og adskilt ved hjælp af morfologiske eller fysiologiske kendetegn. I alle tilfælde må sådanne karakterer kunne beskrives præcist og kunne genkendes." (Fri oversættelse fra engelsk. (Anon, 1974b)).

II. Ensartet

"Nye sorter skal være tilstrækkelig ensartede, idet der tages hensyn til særlige egenskaber ved dens generative eller vegetative formering." (Fri oversættelse fra engelsk. (Anon, 1974b)).

III. Stabil

"Nye sorter skal være stabile i afgørende karakterer, d.v.s. de må være i overensstemmelse med deres beskrivelse efter gentagne formeringer, eller hvis forædleren har defineret en særlig formerings- eller multiplikationscyklus, efter afslutning af hver cyklus." (Fri oversættelse fra engelsk (Anon, 1974b)).

1.1.2 EEC

Reglerne her tager sigte på at sikre, at sorter, der optages på sortsliste, kan adskilles fra andre optagne sorter, samt at de er tilstrækkelig ensartede og stabile. For landbrugsplanter skal sorterne endvidere godkendes for dyrkningsværdi. Kun udsæd der er certificeret, må forhandles i EEC-landene. Certificeringen kan kun ske, når sorten er optaget på den nationale sortsliste eller på EEC-sortslisten. Under bestemte kriterier er andre EEC-landes sortslister ligestillet med den danske sortsliste.

For at en sort kan godkendes til optagelse på sortslisten, skal den således være:

I. Selvstændig
II. Stabil
III. Tilstrækkelig ensartet
IV. Tilfredsstillende med hensyn til dyrknings- og nytteværdi (kun landbrugsplanter).

I. Selvstændig

En sort er selvstændig, når den ved et eller flere væsentlige morfologiske eller fysiologiske kendetegn tydeligt adskiller sig fra enhver anden sort, som er godkendt til optagelse på den danske sortsliste eller på De Europæiske Fællesskabers fælles sortsliste for landbrugsplanter henholdsvis grønsagsarter. Findes der ved afprøvningen, at to eller flere anmeldte sorter ikke er tilstrækkelig forskellige, godkendes den sort, der er anmeldt først (Anon, 1974a).

For hver art er udarbejdet en liste over de karakterer, der som minimum skal undersøges (Anon, 1972 a og b).

II. Stabil

En sort er stabil, hvis den efter gentagne formeringer eller, hvis forædleren har fastlagt en særlig formeringscyklus, ved afslutningen heraf stadig i sine væsentligste kendetegn er i overensstemmelse med sortsbeskriveren (Anon, 1974a).

III. Ensartet

En sort er tilstrækkelig ensartet, når den under hensyntagen til formeringsmåden for den art, den tilhører, består af planter, der bortset fra enkelte afvigelser er ens med hensyn til de kendetegn, der er fastsat for afprøvningen af ensartethed for den pågældende art (Anon, 1974a).

IV. Dyrknings- og nytteværdi

For landbrugsplanter foretages også en undersøgelse for dyrknings- og nytteværdi. Da denne undersøgelse sker i andre forsøg end de, der benyttes ved undersøgelse for selvstændighed, ensartethed og stabilitet, vil denne undersøgelse ikke blive behandlet her.

1.1.3 Sammenligning mellem de to sæt regler

EEC-reglerne er udarbejdet for flere arter end UPOV-reglerne, men dækningsområderne er dog noget forskellige, således findes der UPOV-regler for en række prydplanter, som ikke er omfattet af EEC-reglerne. For landbrugsplanterne derimod omfatter EEC-reglerne næsten alle arter, mens udarbejdede UPOV-regler kun omfatter en mindre del heraf.

For de arter, som er omfattet af begge sæt regler, gælder at en afprøvning efter UPOV's regler er mere omfattende end en afprøvning efter EEC's regler, idet UPOV's regler specificerer sammenligning af flest karakterer. For mange af de arter, der er omfattet af begge sæt regler, er det almindeligt at bruge UPOV's regler, også når det alene gælder en afprøvning for optagelse på sortsliste.

En sortsejer kan anmelde sin sort til optagelse på sortsliste (EEC's regler) og/eller til beskyttelse af forædlerrettigheder (UPOV's regler).

Ingen af disse regelsæt anfører specifikt, hvordan de registrerede værdier skal sammenlignes, eller hvor store eller sikre forskellene skal være, før en nyanmeldt sort skal erklæres uensartet henholdsvis ustabil. Det fremgår heller ikke af regelsættene, om der bør bruges statistiske metoder.

For nogle plantearter, hvor sorterne alle kan adskilles ved hjælp af kvalitative karakterer og alle individer fra en given sort besidder samme egenskab, er det næppe nødvendigt at bruge statistiske metoder, men for mange plantearter er det kun muligt at adskille sorterne ved hjælp af kvantitative karakterer (Flengmark, 1977), og det vil da oftest være nødvendigt at benytte statistiske metoder.

Det er de statistiske metoder for sådanne kvantitative karakterer, der skal behandles i det følgende.

1.2 NUVÆRENDE FORSØGSMETODIK

1.2.1 Selvstændighedsafprøvningen

Denne afprøvning foretages normalt ved at dyrke alle de nyanmeldte sorter sammen med referencesorterne i et forsøg. Forsøgene er anlagt som fuldstændige blokforsøg med normalt 2 eller 3 blokke. I hver parcel registreres en række karakterer på ca. 20-25 enkeltplanter, således at der for hver sort registreres på ialt ca. 50-60 enkeltplanter. Der udføres normalt et forsøg hvert år, og en nyanmeldt sort skal afprøves i mindst 2 år, før den eventuelt kan godkendes. Ud over de direkte registrerede karakterer beregnes nogle relationer mellem 2 eller flere karakterer (f.eks. kvotienter mellem længde og breddemål). Hvert forsøg og karakter analyseres separat i en tosidig variansanalyse med "blokke" og "sorter" som faktorer. Ved en sådan analyse har man implicit benyttet følgende model:

$$X_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \qquad (1.1)$$

hvor $i = 1,2,3,\ldots,k$, sortsnummer

$j = 1,2,\ldots,n$, bloknummer

X_{ij} = gennemsnit af registreringerne i den i'te sort i den j'te blok

μ_i = middelværdi for den i'te sort

β_j = effekt af den j'te blok

ε_{ij} = tilfældig virkning af den i'te sort i den j'te blok

$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$

$\{\varepsilon_{ij}\}$ antages uafhængige og normalfordelte, $N(0,\sigma^2)$.

For hvert sortspar (i, i'), hvor i er en nyanmeldt sort og i' er en referencesort, testes delhypotesen $H_{0i,i'} : \mu_i = \mu_{i'}$ (at sort i og i' er identiske for den pågældende karakter) ved at sammenligne $|\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{i'.}|$ (numerisk differens) med $LSD_{1-\alpha}$. Hypotesen $H_{0i,i'}$ forkastes, hvis $|\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{i'.}|$ er større end $LSD_{1-\alpha}$, hvor

$$LSD_{1-\alpha} = t_{1-\alpha/2,m}\sqrt{\frac{2s^2}{n}}\,.$$

Her er s^2 det centrale estimat for σ^2 med $m = (n-1)(k-1)$ frihedsgrader, som fås fra variansanalysen, og $t_{1-\alpha/2,m}$ er $(1-\alpha/2)$-fraktilen i en t-fordeling med m frihedsgrader.

En nyanmeldt sort i betragtes som forskellig fra sort i' , hvis der for mindst én væsentlig karakter gælder: 1) $H_{0i,i'}$ skal kunne forkastes i 2 år. (Det ene år på niveau α og det andet på niveau γ). 2) Forskellen skal udvise samme fortegn i alle år.

Den nyanmeldte sort betragtes som selvstændig, hvis den er forskellig fra alle referencesorterne.

I disse test har man hidtil benyttet $\alpha = 0.05$ og $\gamma = 0.10$, men da de fleste lande har benyttet $\alpha = 0.01$, er man efter aftale blevet enig om, at bruge $\alpha = 0.01$. For flere plantearter har man i de senere år strammet kravene og benytter nu $\alpha = \gamma = 0.01$.

1.2.2 Ensartethedsafprøvning

Denne afprøvning sker ved at sammenligne sorternes variationskoefficienter. For hver parcel beregnes variationskoefficienten, hvorefter sorternes gennemsnitlige variationskoefficienter beregnes som simpelt gennemsnit af de enkelte parcellers variationskoefficienter.

En nyanmeldt sort erklæres for uensartet, hvis dens variationskoefficient i begge afprøvningsår for en væsentlig karakter er større end tidligere godkendte sorters variationskoefficienter. Inden for EEC er udarbejdet en liste over karakterer, der betragtes som væsentlige og som skal undersøges for ensartethed. Karakterer, der har været anvendt til at adskille sorten fra referencesorterne, betragtes også som væsentlige.

Datamaterialet er det samme som anvendes i selvstændighedsafprøvningen.

1.2.3 Stabilitetsafprøvning

I almindelighed undersøges en sort først for stabilitet efter at den er optaget på sortslisten. Afprøvningen sker da ved at sammenligne planter fra en standardprøve med planter fra nyhjemtaget partiprøve.

2. SELVSTÆNDIGHEDSAFPRØVNING

Når man skal sammenligne sorter, må man skelne mellem 2 former for sammenligning: 1) hvor alle sorter har været dyrket side om side i et regulært forsøg og 2) hvor sorterne ikke har været dyrket side om side, men hvor registreringerne f.eks. er foretaget i forskellige år. Den førstnævnte metode er den, der oftest anvendes ved sortsafprøvning i hvert fald inden for enårige afgrøder, og det er den, der skal behandles her.

Ved selvstændighedsafprøvningen skal man undersøge, om en nyanmeldt sort er forskellig fra alle kendte sorter. Da dette i praksis er umuligt, gør man normalt det, at man undersøger, om sorten er forskellig fra de sorter, som er optaget på den europæiske (EEC) sortsliste samt enkelte andre sorter (f.eks. svenske sorter).

2.1 DEFINITION AF "ERROR RATE"

Ved anvendelse af statistiske metoder har man altid en vis sandsynlighed for, at en given konklusion skal blive forkert. De forkerte konklusioner (udsagn) kan deles i 2 typer:

I To sorter erklæres forskellige, når de i virkeligheden er ens

II To sorter erklæres ens, når de i virkeligheden er forskellige.

Disse to typer af fejl hænger sammen, således at hvis man gør sandsynligheden for I lille (evt. uendelig lille) vil sandsynligheden for II vokse og omvendt, hvis man gør sandsynligheden for I stor, vil sandsynligheden for II formindskes.

Sandsynligheden for I er den, man lettest kan kontrollere, idet den kan beregnes uden at kende populationens sande parametre, hvorimod man for at beregne sandsynligheden for II i hvert fald må have gode estimater for populationernes sande parametre. Da det dertil kommer, at I oftest er den "alvorligste" fejltype, bruger man at fastsætte sandsynligheden for denne (ofte 10%, 5%, 1% eller 0.1%) og lader sandsynligheden for II blive bestemt indirekte (mindst mulig, givet sandsynligheden for I og en given størrelse af forsøget). I forbindelse med fejltyper forekommer ofte betegnelsen teststyrke, der er givet ved 1 ÷ sandsynligheden for type II fejlen.

2.1.1 Multiple sammenligninger

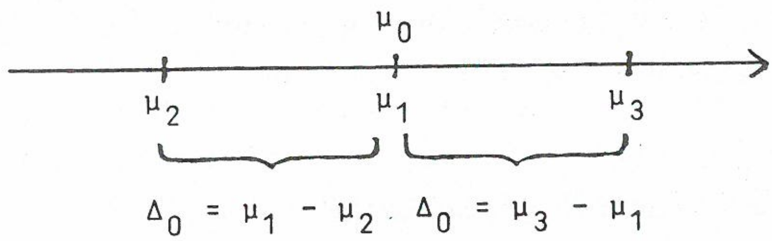
For at fastholde signifikansniveauet på 1% i det enkelte forsøg må man tage hensyn til, at der foretages flere sammenligninger for at afgøre, om en given sort er forskellig fra de øvrige. Disse sammenligninger falder naturligt i 2 grupper. Dels sammenligninger af flere sortspar indenfor en enkelt karakter og dels sammenligninger af en række karakterer for et givet sortspar.

2.1.1.1 Sammenligning af flere sortspar

For at en nyanmeldt sort kan betragtes som selvstændig, må den som tidligere nævnt være forskellig fra alle referencesorterne.

Benytter vi kun en enkelt karakter, og sammenligner vi sorterne ved hjælp af $LSD_{1-\alpha}$, vil sandsynligheden for at en nyanmeldt sort bliver betragtet som forskellig fra alle referencesorterne være mindre end α, hvis den nyanmeldte sort er identisk med en af referencesorterne (f.eks. nr. 1). Dette skyldes, at i de ca. 100α% af tilfældene, hvor den nyanmeldte sort fejlagtig bliver betragtet som forskellig fra referencesort 1, vil den ikke nødvendigvis blive betragtet som forskellig fra de øvrige referencesorter. Hvor meget den nævnte sandsynlighed bliver mindre end α vil være afhængig af antal referencesorter, størrelserne af forskellene mellem referencesorterne samt den tilfældige variation og forsøgets størrelse.

For at belyse hvor stor betydning de tre sidstnævnte faktorer har, kan vi tænke os et forsøg med 3 referencesorter (1, 2 og 3) samt en nyanmeldt sort (0), som er identisk med referencesort 1. Vi kalder sorternes middelværdier for henholdsvis μ_0, μ_1, μ_2 og μ_3, og for at simplificere sætter vi $\mu_3 - \mu_1 = \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ (se figur 2.1.1).



Figur 2.1.1 Antagne middelværdier for 3 referencesorter og en nyanmeldt sort.

Antages karakteren normalfordelt med konstant varians og kendes middelværdier og varians samt forsøgets størrelse, kan vi beregne (se appendix side A1) sandsynligheden for, at den nyanmeldte sort fejlagtig betragtes som forskellig fra alle 3 referencesorter i et enkeltforsøg på en enkelt karakter (tabel 2.1.1). Af tabellen fremgår det, at den nævnte sandsynlighed antager et minimum for $\Delta = \Delta_0 \sqrt{n}/\sigma$ ca. 1-3, hvilket kan forklares ved at sort 2 og 3 da ligger som et værn omkring μ_0, således at der er meget lille sandsynlighed for at den nyanmeldte sort bliver betragtet som selvstændig. Er $\Delta >$ ca. 5, får vi at sandsynligheden er omtrent lig α. Det bemærkes, at Δ bliver stor, hvis referencesorterne er meget forskellige, hvis den tilfældige variation er lille og/eller forsøget er anlagt med mange gentagelser.

Er der flere end 3 sorter med middelværdier i området omkring μ_0, kan sandsynligheden for at en nyanmeldt sort fejlagtig bliver betragtet som forskellig fra alle referencesorter bliver mindre, end de i tabellen viste værdier. Den nævnte sandsynlighed må formodes at kunne blive væsentlig mindre end ovenfor, hvis referencesorternes middelværdier er nogenlunde jævnt fordelt på begge sider af den nyanmeldte sorts middelværdi.

Δ	Antal frihedsgrader, m					
	20		50		∞	
	α = .01	α = .05	α = .01	α = .05	α = .01	α = 0.5
0	.00042	.0041	.00031	.0036	.00024	.0032
1	.00023	.0024	.00016	.0020	.00012	.0017
2	.00011	.0023	.00004	.0014	.00002	.0009
3	.00057	.0090	.00024	.0068	.00009	.0053
4	.00205	.0223	.00129	.0198	.00079	.0180
5	.00454	.0363	.00361	.0349	.00287	.0338
6	.00715	.0453	.00653	.0450	.00598	.0448
7	.00894	.0489	.00872	.0490	.00853	.0490
8	.00973	.0498	.00970	.0499	.00967	.0499
9	.00997	.0500	.00996	.0500	.00995	.0500
10	.01000	.0500	.01000	.0500	.00998	.0500

Tabel 2.1.1 Sandsynligheden, α_1, for at en nyanmeldt sort, sort 0, fejlagtig bliver betragtet som forskellig fra alle 3 referencesorter i et enkelt forsøg på en enkelt karakter som funktion af Δ, hvor $\Delta = (\mu_3-\mu_0)\sqrt{n}/\sigma = (\mu_0-\mu_2)\sqrt{n}/\sigma$ og $\mu_0 = \mu_1$.

2.1.1.2 Sammenligning af flere karakterer

Nu sammenligner vi ikke blot sorterne på en enkelt karakter, men på en række karakterer, for eksempel:

sort 0 med sort 1 på karakter 1
sort 0 med sort 1 på karakter 2

⋮

osv.

Hvis vi sammenligner sorterne karakter for karakter ved hjælp af LSD, kan sandsynligheden for, at sort 0 betragtes som forskellig fra sort 1, selv om de er identiske, blive større end α. Det skyldes, at de 2 sorter i de ca. $100(1-\alpha)$% af tilfælde, hvor de ikke bliver betragtet som forskellige for karakter 1, kan blive betragtet som forskellige for karakteren 2. Er der mere end 2 karakterer, vil sandsynligheden blive endnu lidt større, for i de tilfælde, hvor hverken karakter 1 eller karakter 2 giver anledning til at betragte de 2 sorter som forskellige, kan de blive betragtet som forskellige som følge af en tilfældig signifikant forskel for karakter 3 o.s.v.

Hvis alle karakterer kan antages uafhængige, kan vi beregne ovennævnte sandsynlighed for at 2 identiske sorter bliver betragtet som forskellige i et enkelt forsøg ved (se appendix side A3):

$$\alpha_2 = 1 - (1-\alpha)^p \quad ,$$

hvor p = antal karakterer (uafhængige)
α = signifikansniveau i de benyttede test.

For p større end 1 bliver testniveauet (sandsynligheden for type I-fejlen) altså større end den tilstræbte værdi α (tabel 2.1.2). For at kompensere herfor kan man enten benytte et andet testniveau, α^*, ved beregning af LSD-værdien således at $\alpha_2 = 1-(1-\alpha^*)^p = \alpha$, eller man kan forlange, at sorterne skal udvise signifikante forskelle for mere end en karakter (se appendix side A6).

I tabel 2.1.2 er - foruden det beregnede testniveau - vist de værdier af α^* og antal signifikante karakterer, der skal benyttes for at fastholde testniveauet på det ønskede niveau α.

Kan karaktererne ikke antages at være uafhængige, gælder ovenstående beregninger ikke generelt. Er der kun to karakterer, og kan disse antages at følge en todimensional normalfordeling, vil de ovenfor beregnede værdier for α_2 danne øvre grænse for testniveauet (appendix side A3-A4). For vilkårligt antal karakterer kan de i tabel 2.1.2 beregnede værdier kun benyttes som øvre grænser i meget specielle tilfælde (Šidák, 1971).

Antal karakterer, p	Tilstræbt testniveau					
	$\alpha = 0.01$			$\alpha = 0.05$		
	α_2	α^*	a	α_2	α^*	a
1	0.010	0.0100	1	0.050	0.0500	1
2	0.020	0.0050	2	0.098	0.0253	2
3	0.030	0.0033	2	0.143	0.0169	2
4	0.039	0.0025	2	0.185	0.0127	2
6	0.059	0.0017	2	0.265	0.0085	2
8	0.077	0.0013	2	0.337	0.0064	3
10	0.096	0.0010	2	0.401	0.0051	3
15	0.140	0.0007	2	0.537	0.0034	3
20	0.182	0.0005	3	0.642	0.0026	4
25	0.222	0.0004	3	0.723	0.0020	4
30	0.260	0.0003	3	0.785	0.0017	5
50	0.395	0.0002	4	0.923	0.0010	6
100	0.634	0.0001	5	0.994	0.0005	10

Tabel 2.1.2 Beregnet testniveau, α_2, ved sammenligning af en nyanmeldt sort med en kendt sort i et enkelt forsøg samt den fraktilværdi, α^*, og antal signifikante karakterer, a, som sikrer det tilstræbte testniveau ved anvendelse af et varierende antal uafhængige karakterer.

For at beregne et sæt øvre grænser, som gælder generelt, kan vi benytte Bonferronis ulighed (appendix side A3-A4). Benyttes denne metode, er den øvre grænse for testniveauet givet ved:

$$\alpha_2 \leq p\alpha$$

Den fraktilværdi, α^*, man skal benytte ved beregning af LSD-værdien for at sikre, at testniveauet ikke bliver større end den valgte værdi, α, vil da være:

$$\alpha^* = \alpha/p$$

I tabel 2.1.3 er for en række kombinationer af antal frihedsgrader og antal karakterer vist de t-værdier, som skal benyttes ved beregning af LSD-værdier, for at sikre at testniveauet ikke bliver for stort. Værdier for andre kombinationer af α, p og m (α = 0.50, 0.40, 0.30, 0.20, 0.10, 0.05, 0.025 og 0.01, p = 2, 6, 10 og 20, m = 4, 10, 30 og ∞) findes i Dunn & Massey (1965).

Totalt antal karakterer p	Tilstræbt testniveau					
	α = 0.01			α = 0.05		
	m = 20	m = 50	m = ∞	m = ∞	m = 50	m = ∞
1	2.85	2.68	2.58	2.09	2.01	1.96
2	3.15	2.94	2.81	2.42	2.31	2.24
3	3.33	3.08	2.93	2.61	2.48	2.40
4	3.46	3.18	3.03	2.74	2.59	2.50
6	3.63	3.32	3.15	2.93	2.74	2.64
8	3.75	3.42	3.23	3.06	2.86	2.74
10	3.85	3.50	3.29	3.15	2.94	2.81
15	4.02	3.63	3.41	3.33	3.08	2.94
20	4.15	3.72	3.48	3.46	3.18	3.03
25	4.24	3.79	3.55	3.55	3.26	3.10
30	4.32	3.85	3.59	3.63	3.32	3.15
50	4.54	4.01	3.72	3.85	3.49	3.29
100	4.84	4.23	3.89	4.15	3.72	3.48

Tabel 2.1.3 t-værdier som - benyttet ved beregning af LSD-værdier - sikrer, at testniveauet i et enkelt forsøg er højst α. Værdierne er udregnet for nogle kombinationer af antal frihedsgrader og antal karakterer.

Af tabellen fremgår det, at såfremt der er mange karakterer i forsøget, skal der benyttes en t-værdi, som er væsentlig større end de, der hidtil har været benyttet (øverste linie i tabellen). Således skal der ved anvendelse af 25 karakterer og med 20 frihedsgrader benyttes en t-værdi, som er ca. 1.5 gange større end den, der hidtil har været benyttet for at sikre, at testniveauet i det enkelte forsøg er højst 0.01.

2.1.2 Nuværende testniveau

I det foregående har vi betragtet enten en karakter eller en sortssammenligning ad gangen i et enkelt år.

Nu foretages alle sortssammenligninger som nævnt i mindst 2 år, og for at et givet sortspar bliver betragtet som forskellige, skal følgende være opfyldt for mindst en af karaktererne:

1) $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| > LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i et år

2) $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| > LSD^{\ell}_{1-\gamma}$ i et af de øvrige år

3) $\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}$ har samme fortegn i alle år, (jvf. side 6-7).

Betragtet vi en afprøvning i 2 år, og forudsættes $\gamma \geq \alpha$, er punkt 1 og 2 opfyldt ved en af følgende to hændelser:

B_1: $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| > LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i begge år

B_2: $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| > LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i et år
og $LSD^{\ell}_{1-\gamma} < |\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| \leq LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i det andet år.

Hvis de to sorter er identiske, vil sandsynligheden for at $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}|$ er større end $LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i et enkelt år som tidligere nævnt være α, mens sandsynligheden for at $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}|$ er større end $LSD^{\ell}_{1-\gamma}$, men mindre end $LSD^{\ell}_{1-\alpha}$, er $\gamma-\alpha$. Da de to hændelser, B^{ℓ}_1 og B^{ℓ}_2, ikke kan forekomme samtidig, får vi at sandsynligheden for at få punkt 1 og 2 opfyldt er:

$$\alpha^2 + 2\alpha(\gamma-\alpha) .$$

For at beregne sandsynligheden for, at $\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}$ har samme fortegn i begge år, betragter vi de 4 mulige fortegnskombinationer.

For to af disse fortegnskombinationer er der samme fortegn i begge år, og vi får da, at sandsynligheden for at $\bar{X}^{\ell}_{1.}-\bar{X}^{\ell}_{0.}$ har samme fortegn i begge år er $\frac{1}{2}$.

Kaldes hændelsen, at et givet sortspar bliver betragtet som forskellige for en enkelt karakter for A^{ℓ}_{01}, får vi for en to-årig afprøvning

$$P(A^{\ell}_{01}) = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha(\gamma-\alpha)) = \tfrac{1}{2}\alpha(2\gamma-\alpha)$$

For en afprøvning i b år får vi (se appendix side A7-A8):

$$P(A^{\ell}_{01}) = (\tfrac{1}{2})^{b-1}(1-(1-\alpha)^b-b\alpha(1-\gamma)^{b-1})$$

Sandsynligheden for at sortsparret bliver betragtet som forskellig bliver da sandsynligheden for at ovenstående hændelse, A^{ℓ}_{01}, skal ske for mindst en karakter. Denne sandsynlighed er for uafhængige karakterer

$$\alpha_3 = 1-[1-P(A^{\ell}_{01})]^p \ . \tag{2.1.1}$$

I tabel 2.1.4 er α_3 beregnet for $\alpha = 0.01$ og 0.05, $\gamma = \alpha$, 0.1 og 1.0 samt $b = 2$ og 3. Her svarer $\gamma = \alpha$ til, at man forlanger at forskellen skal være signifikant i mindst 2 år på niveau α, mens $\gamma = 1.0$ svarer til, at forskellen kun skal være signifikant i 1 år, men dog udvise samme fortegn i alle år.

Sandsynligheden for at et givet sortspar fejlagtig bliver betragtet som forskellige, ses at være stærkt afhængige af antal karakterer samt - naturligvis - af de valgte α- og γ-værdier.

For $\gamma = \alpha$ og $\gamma = 0.1$ og fastholdt α er α_3 mindre for en toårs afprøvning end for en treårs afprøvning, mens det omvendte er tilfældet for $\gamma = 1.0$ (for γ = ca. $\frac{2}{3}$ er α_3 ens for en to- og treårig afprøvning). Ved beregning for b større end 3 finder man, at α_3 er tilnærmelsesvis ens for en tre- og fireårig afprøvning, når $\gamma \leq 0.1$. Øges antal år derudover, bliver γ_3 mindre jo flere år, afprøvningen varer og vil for en femårig afprøvning tilnærmelsesvis være som for en toårig afprøvning, stadig for $\gamma \leq 0.1$. Er $\gamma = 1.0$, vil α_3 være størst for en toårig afprøvning og aftager med antal afprøvningsår.

Antal år b	Antal karakterer p	$\alpha = 0.01$			$\alpha = 0.05$		
		γ=0.01	γ=0.10	γ=1.00	γ=0.05	γ=0.10	γ=1.00
2	1	.000050	.00095	.00995	.001250	.00375	.04875
	2	.00010	.002	.020	.00250	.007	.095
	3	.00015	.003	.030	.00375	.011	.139
	4	.00020	.004	.039	.00499	.015	.181
	6	.00030	.006	.058	.00748	.022	.259
	8	.00040	.008	.077	.00996	.030	.330
	10	.00050	.009	.095	.01243	.037	.393
	15	.00075	.014	.139	.01859	.055	.527
	20	.00100	.018	.181	.02471	.072	.632
	25	.00125	.023	.221	.03079	.090	.713
	30	.00150	.028	.259	.03683	.107	.777
	50	.00250	.046	.393	.06062	.171	.918
	100	.00499	.091	.632	.11757	.313	.993
3	1	.000075	.00135	.00743	.001813	.00528	.03566
	2	.00015	.003	.015	.00362	.011	.070
	3	.00022	.004	.022	.00543	.016	.103
	4	.00030	.005	.029	.00723	.021	.135
	6	.00045	.008	.044	.01083	.031	.196
	8	.00060	.011	.058	.01441	.041	.252
	10	.00074	.013	.072	.01798	.052	.304
	15	.00112	.020	.106	.02685	.076	.420
	20	.00149	.027	.138	.03563	.100	.516
	25	.00186	.033	.170	.04434	.124	.597
	30	.00223	.040	.200	.05297	.147	.664
	50	.00372	.065	.311	.08672	.233	.837
	100	.00742	.126	.525	.16591	.411	.974

Tabel 2.1.4 Beregnet testniveau, α_3, ved sammenligning af en nyanmeldt sort med én kendt sort og med anvendelse af uafhængige karakterer.

Kan karaktererne ikke antages uafhængige, er det ikke muligt at beregne nogle generelle sandsynligheder for type I-fejlen, α_3. Ved hjælp af Bonferronis ulighed (A.3) kan beregnes nogle øvre grænser for α_3. Vi får:

$$\alpha_3 = P(\bigcup_{\ell=1}^{p} A_{01}^{\ell}) \leq p\, P(A_{01}^{\ell}) \qquad (2.1.2)$$

Det vil sige, vi i det generelle tilfælde får, at α_3 er mindre end p gange den tilsvarende sandsynlighed, hvis der kun blev anvendt en karakter (øverste linie i tabel 2.1.4).

Vi kan sikre os, at α_3 ikke bliver større end en forudvalgt værdi, α_3^0, ved at vælge α- og γ-værdier i de enkelte test, således at:

$$\alpha_3^0 = p\ P(A_{01}^{\ell}) = p[1-(1-\alpha)^b - b\alpha(1-\gamma)^{b-1}](\tfrac{1}{2})^{b-1}$$

Da såvel α og γ kan vælges frit, findes der mange forskellige løsninger. Vælger vi f.eks. at sætte $\gamma = \alpha$, kan vi finde én løsning. Denne er givet i tabel 2.1.5 for b = 2 og 3, α_3^0 = 0.001 og 0.01 samt p = 1,2,3,4,6,8,10,15,20,25,30,50 og 100.

Antal karakterer p	Antal år, b			
	2		3	
	α_3^0=0.001	α_3^0=0.01	α_3^0=0.001	α_3^0=0.01
1	.0447	.1414	.0370	.1204
2	.0316	.1000	.0261	.0840
3	.0258	.0817	.0212	.0682
4	.0224	.0707	.0184	.0589
6	.0182	.0577	.0150	.0479
8	.0158	.0500	.0130	.0414
10	.0142	.0447	.0116	.0370
15	.0116	.0365	.0095	.0301
20	.0100	.0316	.0082	.0260
25	.0090	.0283	.0073	.0233
30	.0082	.0258	.0067	.0212
50	.0063	.0200	.0052	.0164
100	.0045	.0142	.0037	.0116

Tabel 2.1.5. Testniveau i det enkelte forsøg, som vil sikre at testniveauet efter en b-årig afprøvning bliver højst α_3^0, når $\gamma = \alpha$, og den nyanmeldte sort sammenlignes med referencesorterne ved p karakterer.

Er der mere end én referencesort i forsøget, bliver den nyanmeldte sort fejlagtig betragtet som selvstændig, hvis punkt 1),

2) og 3) side 15 er opfyldt for alle referencesorter. Kalder vi sandsynligheden for, at en nyanmeldt sort fejlagtig bliver betragtet som selvstændig for α_4, har vi (appendix A9):

$$\alpha_4 \leq \alpha_3$$

hvor α_3 er sandsynligheden for, at den nyanmeldte sort bliver betragtet som forskellig fra en referencesort, som den er identisk med. Da vi ikke kender referencesorternes parametre, synes det ikke muligt at beregne et mere præcist estimat for α_4 end ovenstående, der alene giver en øvre grænse.

2.2 BESLUTNINGSSTRUKTUR

Selv om der i et enkelt forsøg ofte er flere nyanmeldte sorter til afprøvning, kan det være naturligt at sammenligne disse med referencesorterne sekventielt, således at man først sammenligner en af de nye sorter med referencesorterne; hvis denne er forskellig fra disse, betragtes den for selvstændig og overføres til referencesorterne, hvorefter man behandler den næste nyanmeldte sort på samme måde, blot med den forskel, at den skal sammenlignes med yderligere en referencesort; hvis en nyanmeldt sort ikke er signifikant forskellig fra referencesorterne, betragtes den for ikke selvstændig og udgår af sammenligningsproceduren. Rækkefølgen, hvori de nyanmeldte sorter inddrages i sammenligningen, bør være den samme som anmeldelsesrækkefølgen. Herved opnår man, at såfremt to nyanmeldte sorter ikke findes at være indbyrdes forskellige, så vil den, der er anmeldt først, blive godkendt. Jvf. Landbrugsministeriets bekendtgørelse (Anon 1974a).

2.3 MULTIVARIATE TEST

Er karaktererne indbyrdes afhængige - hvilket de oftest vil være - har vi ifølge det foregående (afsnit 2.1.2) ikke fuld kontrol over type I-fejlen, når vi benytter karaktererne enkeltvis.

Det vil derfor være naturligt at benytte metoder, hvor alle karaktererne betragtes under et, det vil sige multivariate metoder.

Som ved de univariate test kan vi nøjes med at betragte registreringer pr. parcel, d.v.s. vore grunddata bliver gennemsnit af registreringer på individerne i en parcel. Hvis variationen fra individ til individ er den eneste tilfældige variationsårsag, vil disse gennemsnitstal tendere til at følge en flerdimensional normalfordeling - selv om en del af karaktererne (tællingerne) er diskrete. Dette er en følge af den centrale grænseværdisætning (Kendall & Stuart, 1977 p 206-208). Imidlertid vil der - foruden denne variation fra individ til individ - også være en tilfældig variation fra parcel til parcel. Vi vil i det følgende antage, at vore grunddata kan transformeres således, at disse kan beskrives ved en flerdimensional normalfordeling.

For forsøget antager vi modellen

$$X_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \tag{2.3.1}$$

hvor $i = 1,2,\ldots,k$, sortsnumre

$j = 1,2,\ldots,n$, bloknumre

$\{X_{ij}\}$, $\{\mu_i\}$, $\{\beta_j\}$ og $\{\varepsilon_{ij}\}$ er p-dimensionale vektorer

p = antal karakterer

k = antal sorter (nyanmeldte + referencesorter)

n = antal blokke

X_{ij} = gennemsnit af registreringerne på individerne i den i'te sort i den j'te blok

μ_i = middelværdi af den i'te sort

β_j = effekt af den j'te blok

ε_{ij} = tilfældig virkning af den i'te sort i den j'te blok

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$$

$\{\varepsilon_{ij}\}$ antages uafhængige og normalfordelt $N(0,\Sigma_X)$

Efter forsøgets udførelse undersøges, om den/de nyanmeldte sorter kan adskilles fra alle referencesorter. Vi tænker os, at referencesorterne er nummereret fra en og opefter samt at de nyanmeldte sorter har numre herefter ordnet efter anmeldelsesdato. Betragter vi en nyanmeldt sort, i, ad gangen, får vi hypoteserne:

$$\begin{aligned} H_{0i} &: \mu_i = \mu_1 \vee \mu_i = \mu_2 \vee \ldots \vee \mu_i = \mu_{k_i} \\ H_{1i} &: \mu_i \neq \mu_1 \wedge \mu_i \neq \mu_2 \wedge \ldots \wedge \mu_i \neq \mu_{k_i} \end{aligned} \qquad i > k_i \qquad (2.3.2)$$

hvor k_i er antallet af referencesorter, når vi betragter den nyanmeldte sort med nr. i.

Et test for H_{0i} kan udføres på flere måder. Er parametrene for referencesorterne (dvs. $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k_i}$ og Σ_X) kendte, og er $p \geq k_i$, kan H_{0i} testes i to trin som anført af Rao (1962), idet det først undersøges, om den nyanmeldte sort kan antages at ligge i det hyperplan, som udspændes af referencesorternes middelværdier; hvis dette er tilfældet fortsættes med næste trin, hvor den nyanmeldte sort sammenlignes med hver enkelt referencesort ved hjælp af diskriminantfunktionerne. Denne metode kan generaliseres for anvendelse, også når Σ_X er ukendt (Rao, 1962). Derimod synes denne metode ikke at kunne bringes til anvendelse hvis middelværdierne for referencesorterne skal estimeres fra data.

Det nært beslægtede problem, at finde den population - blandt k givne - som en ukendt population ligner mest, er behandlet af Cacoullos (1965a og 1965b) samt Srivastava (1967). Overført til den her benyttede notation forudsætter Cacoullos (1965a), at $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k_i}$ og Σ_X er kendte, mens samme forfatter (1965b) benytter en Bayes-metode, som alene forudsætter, at μ_i og Σ_X er kendte. Srivastava (1967) angiver en metode, som ikke nødvendigvis forudsætter, at parametrene kendes.

Et testkriterium for H_{0i} under et synes derimod ikke at eksistere i litteraturen (Srivastava, 1967). Vi vil derfor betragte delhypoteserne $H_{0i,i'} : \mu_i = \mu_{i'}$ enkeltvis og ud fra test af disse forkaste eller acceptere H_{0i}.

Hver af de enkelte delhypoteser $H_{0i,i'}$ kan testes ved et test svarende til Hotellings T^2-test. Transformerer vi teststørrelsen til en F-værdi, får vi, at $H_{0i,i'}$ kan testes ved (Rao, 1973 p 541-542):

$$F_{i,i'} = \frac{m-p+1}{m\cdot p}\cdot\frac{n}{2}\,(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{i'.})'\hat{\Sigma}_X^{-1}(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{i'.}) \qquad (2.3.3)$$

hvor $\hat{\Sigma}_X = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\hat{\varepsilon}'_{ij}\hat{\varepsilon}_{ij}$ er et centralt estimat for Σ_X

$m = (k-1)(n-1)$ er antal frihedsgrader i $\hat{\Sigma}_X$

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = X_{ij} - \hat{\mu}_i - \hat{\beta}_j = X_{ij} - \bar{X}_{i.} - (\bar{X}_{.j}-\bar{X}_{..})$$

Under $H_{0i,i'}$ er $F_{i,i'}$ F-fordelt $(p,m-p+1)$, mens $F_{i,i'}$ under $H_{1i,i'}$: $\mu_i \neq \mu_{i'}$ er ikke-central F-fordelt $(p,m-p+1,\lambda_{i,i'})$ (Rao, 1973 p 542).

Såfremt de to sorter, i og i', er identiske, har vi altså:

$$P(F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1}) = \alpha$$

mens

$$P(F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1}) > \alpha ,$$

hvis de to sorter er forskellige. Her er $F_{1-\alpha,p,m-p+1}$ $(1-\alpha)$-fraktilen i en F-fordeling med henholdsvis p og m-p+1 frihedsgrader.

Et test for H_{0i} på niveauet α kan fås ved at H_{0i} forkastes, hvis:

$$\min_{i' = 1,2,\ldots,k_i} F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1} \qquad (2.3.4)$$

Det vil sige, hvis alle delhypoteserne $H_{0i,i'}$ forkastes på niveauet α.

Såfremt sorterne i og i_0 er identiske, er

$$P(\min_{i'=1,\ldots,i_0,\ldots,k_i} F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1})$$

$$\leq P(F_{i,i_0} > F_{1-\alpha,p,m-p+1}) = \alpha .$$

Det vil sige, testniveauet bliver altid mindre end eller lig α i et enkelt forsøg.

En anden metode, hvorpå man kan teste p karakterer, er foreslået af Roy (1958). Her betragtes først en karakter. Før den næste karakter betragtes, korrigeres denne i forhold til den første, således at testet for den anden karakter bliver uafhængigt af testet for den første karakter. Den tredie karakter korrigeres ligeledes, således at dette test bliver uafhængigt af de to første test o.s.v. Metoden kræver imidlertid, at karaktererne inddrages i analysen i en på forhånd bestemt rækkefølge. Dempster (1963) har modificeret Roys metode, således at man ikke behøver at have en forud fastlagt rækkefølge. Dette er opnået ved først at transformere data, således at man i stedet for de oprindelige p variable betragter de p principale variable. Denne sidste metode er anvendelig også i de tilfælde, hvor Σ_X er singulær (Dempster, 1963), hvilket er tilfældet, hvis m < p. Den sidstnævnte egenskab besiddes også af en metode foreslået af Dempster (1958 og 1960), som imidlertid ikke er invariant over for lineære transformationer. Således vil den sidstnævnte metode kunne give andre konklusioner, hvis man registrerer nogle af karaktererne i andre enheder.

Hotellings T^2-test eller simple transformationer heraf er i litteraturen anvendt i mange forbindelser. I de fleste anvendelser er estimatet for Σ_X beregnet alene på grundlag af de to populationer, som skal sammenlignes. Anvendelser, hvor Σ_X - som foreslået her - estimeres ud fra mere end to populationer, synes sjældnere. Goodman (1968a) har anvendt størrelserne

$$D_{i,i'} = [(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{i'.})'\hat{\Sigma}_X^{-1}(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{i'.})]^{\frac{1}{2}}$$

for sammenligning af 15 majssorter i et blokforsøg med 8 blokke. Han anvendte 16 karakterer, og hans grunddata var parcelgennemsnit baseret på - i gennemsnit - 8.2 enkelte registreringer. Rao (1958) benyttede $D^2_{i,i'} = (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{i'.})' \hat{\Sigma}_x^{-1} (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{i'.})$ for sammenligning af 17 grupper i en Bengalsk antropometrisk undersøgelse. Grupperne svarede hver til et geografisk område, som var repræsenteret ved stikprøver med fra 33 til 337 individer, og der anvendtes 11 karakterer. Til bedømmelse af, om de beregnede afstande $D^2_{i,i'}$ var signifikant større end nul, transformerede Rao disse til en χ^2-variabel, mens Goodman til samme formål beregnede en approximativ spredning på sine $D_{i,i'}$-værdier. Det af Rao anvendte test bliver identisk med det i (2.3.3) anførte, når m bliver stor.

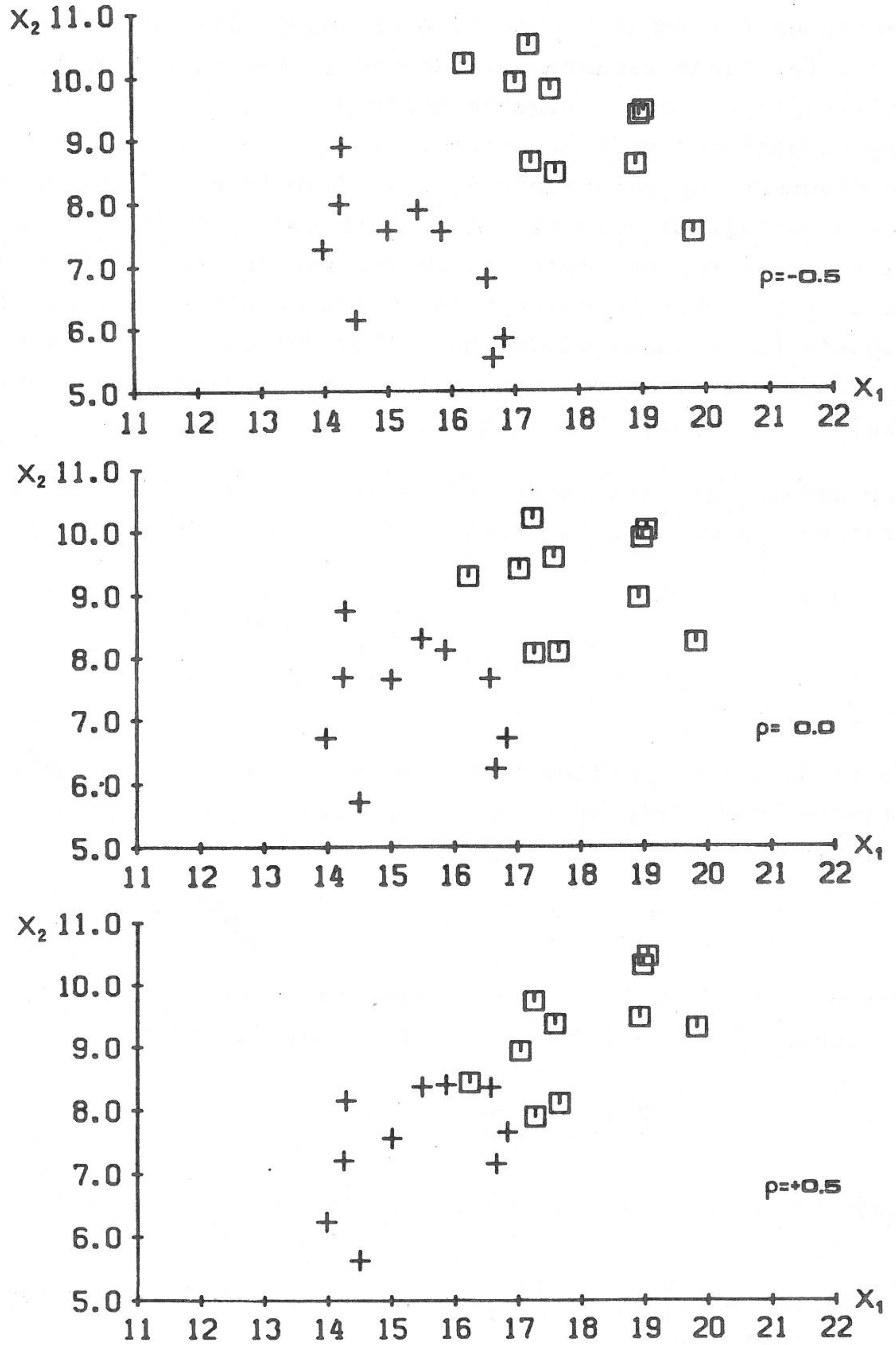
2.3.1 Afstandsmål

I forbindelse med sortsafprøvningen er det ønskeligt at have en "lighedskoefficient"/"forskellighedskoefficient" (Christensen, 1977). Benyttes multivariate metoder, vil det være naturligt at benytte Mahalanobis afstand, $\delta_{i,i'}$, der er defineret ved:

$$\delta^2_{i,i'} = (\mu_i - \mu_{i'})' \Sigma_x^{-1} (\mu_i - \mu_{i'}) \qquad (2.3.5)$$

Mahalanobis afstand er nært knyttet til det foreslåede F-test, og er som dette invariant over for lineære transformationer, og vil således være uafhængig af registreringsenhed. Såvel det foreslåede test som Mahalanobis afstand tager hensyn til korrelation mellem karaktererne. Betydningen heraf er anskueliggjort i figur 2.3.1a, figur 2.3.1b og figur 2.3.1c, hvor to sorter, A og B, sammenlignes ved hjælp af to karakterer X_1 og X_2. I alle tre figurer har sorterne de samme middelværdier:

	Sort A	Sort B
X_1	15.0	18.0
X_2	7.0	9.5



Figur 2.3.1 Plot af 10 stikprøver fra hver af 2 hypotetiske sorter med middelværdivektorer henholdsvis (15.0, 7.0) og (18.0, 9,5) samt med variansen 1 for begge karakterer. Korrelationskoefficienten mellem karaktererne er henholdsvis -0.5, 0.0 og +0.5.

Variansen for karaktererne er også ens i alle tre figurer, nemlig 1 for begge karakterer, derimod er korrelationen mellem de to karakterer forskellige henholdsvis -0.5, 0.0 og +0.5. For de tre situationer er $\delta_{A,B}$ henholdsvis 5.21, 3.91 og 3.21. Af både figurerne og ovennævnte $\delta_{A,B}$-værdier fremgår det, at en negativ korrelation her har øget afstanden i forhold til uafhængige karakterer med samme middelværdier og varianser, mens en positiv korrelation omvendt har mindsket afstanden. Med andre middelværdier kunne vi dog have fået det omvendte resultat: en forøgelse af afstanden ved positiv korrelation og en formindskelse ved negativ korrelation.

For uafhængige karakterer reduceres (2.3.5) til summen af kvadraterne på de enkelte karakterers standardiserede afstande:

$$\delta^2_{i,i'} = \sum_{\ell=1}^{p} \left(\frac{\mu_i^\ell - \mu_{i'}^\ell}{\sigma^\ell}\right)^2 \qquad (2.3.6)$$

Nu er afstandene mellem sorterne imidlertid ukendte og må estimeres ved hjælp af data. Et nærliggende estimat for $\delta^2_{i,i'}$ vil være:

$$D^2_{i,i'} = (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{i'.})'\hat{\Sigma}_x^{-1}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{i'.}) \qquad (2.3.7)$$

Dette er imidlertid ikke forventningsret (appendix side A10). Et centralt estimat for $\delta^2_{i,i'}$ er (appendix side A10):

$$\tilde{\delta}^2_{i,i'} = \frac{m-p-1}{m} D^2_{i,i'} - cp \quad , \qquad (2.3.8)$$

hvor $D^2_{i,i'}$ er givet ved (2.3.7), $c = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}$.

Variansen på $D^2_{i,i'}$ og $\tilde{\delta}^2_{i,i'}$ er for $m-p \geq 4$ givet ved (appendix side A10-A11).

$$\mathrm{Var}(D^2_{i,i'}) = \frac{2m^2}{(m-p-3)(m-p-1)^2}\,[\delta^4_{i,i'}+ 2c(m-1)\,\delta^2_{i,i'}+c^2p(m-1)] \tag{2.3.9}$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{\delta}^2_{i,i'}) = \frac{2}{m-p-3}\,[\delta^4_{i,i'}+2c(m-1)\delta^2_{i,i'}+c^2p(m-1)] \tag{2.3.10}$$

Forventningen af $\tilde{\delta}^2_{i,i'}$ er således uafhængig af forsøgsplanen - omend dens varians er stærkt afhængig af forsøgsplanen og forskellen mellem de to sorter - og kan derfor anvendes som et mål for sorternes forskellighed. Inden for et forsøg - med ens antal gentagelser af alle sorter - kan man dog lige så vel anvende $D^2_{i,i'}$ eller andre monotone funktioner. Specielt kan nævnes logaritmetransformationen, idet variansen på disse er væsentlig mere homogene end varianserne på $D^2_{i,i'}$, når blot $\delta^2_{i,i'}$ er rimelig stor (se afsnit 4.3.3). Variansen på de logaritmetransformerede værdier er approximativt givet ved (appendix side A12):

$$\mathrm{Var}(Z_{i,i'}) \approx \frac{2}{m-p-3}\,\frac{\delta^4_{i,i'} + 2c(m-1)\,\delta^2_{i,i'} + c^2p(m-1)}{\delta^4_{i,i'} + 2cp\delta^2_{i,i'} + c^2p^2} \tag{2.3.11}$$

hvor $Z_{i,i'} = \ln(D^2_{i,i'})$.

Det kan vises, at approximationen er god, hvis $\mathrm{Var}(D^2_{i,i'})/E(D^2_{i,i'})^2$ er væsentlig mindre end 1, d.v.s. hvis de ved approximationen beregnede varianser på $Z_{i,i'}$ er væsentlig mindre end 1.

2.3.2 Robusthed

Selv om testet ved hjælp af Hotellings T^2-test bryder sammen for $m < p$, er den foreslået her. Dette skyldes dels, at den er meget benyttet - dog en lidt anden form end foreslået her - og dens egenskaber er bedre kendt, end egenskaberne ved de andre metoder. Desuden er Hotellings T^2-test invariant over for lineære transformationer (Morrison, 1976 p 133; Hotelling 1931).

Ved anvendelse af statistiske metoder er forudsætningerne for de enkelte test aldrig eller i hvert fald kun sjældent fuldt ud opfyldte. Det vil derfor være ønskværdigt, om det anvendte test er robust over for de mest nærliggende afvigelser fra forudsætningerne (Cox & Hinkley, 1974 p 3, meget frit citat). Forudsætningerne for testet fremgår af modellen for data (2.3.1). De afvigelser herfra, som er mest nærliggende, og har størst betydning, vil jeg anse for at være:

1) sorts- og blokvirkninger er ikke additive
2) $\{\varepsilon_{ij}\}$ er ikke normalfordelte
3) $\{\varepsilon_{ij}\}$ har ikke ens varians.

Hvis sorts- og blokvirkningerne ikke er additive, får man en vekselvirkning mellem sorter og blokke, som med den benyttede model vil blive indeholdt i den stokastiske variabel ε_{ij}. Estimat for Σ_x vil derfor bestå både af den tilfældige variation og af vekselvirkningen. Såfremt vekselvirkningen skyldes at sorterne reagerer forskelligt på ændringer i frugtbarheden (f.eks. at nogle sorter bliver højere jo større frugtbarhederne er, mens andre sorters højde ikke alle kun i mindre grad påvirkes heraf), vil det ofte synes rimeligt at inddrage denne vekselvirkning i den tilfældige variation. Under forudsætning af at vekselvirkningen er moderat, vil sådanne former for afvigelser derfor ikke være alvorlige. Er vekselvirkningen derimod af en sådan karakter, at sorts- og blokvirkningerne kan gøres additive ved en transformation (f.eks. hvis de to virkninger er multiplikative), vil det ikke være rimeligt at benytte modellen i (2.3.1) før efter en transformation. Undlades transformationen, må man forvente, at for få sortspar bliver signifikant forskellige.

Effekten af at $\{\varepsilon_{ij}\}$ ikke er normalfordelte er undersøgt af flere forfattere. Mardia (1971) har vist, at for en ensidig variansanalyse med ens antal observationer i alle grupper er afvigelserne negligible for moderate store stikprøver. Korrektionsfaktoren er $1-C_y/(kn)$, hvor C_y er et mål for ikke-normalitet. Er antal grupper lig to, reduceres det af Mardia undersøgte test til Hotellings T^2-test. Den af Mardia betragtede situation for to grupper afviger fra forholdene ved behandling af modellen (2.3.1) af to grunde. Dels har vi her flere frihedsgrader til bestemmelse af $\hat{\Sigma}_x$, og dels indeholder modellen en blokeffekt. Ingen af disse omstændigheder skønnes dog at påvirke Mardias resultater, og det foreslåede test må derfor antages at være robust over for ikke-normalitet, hvis stikprøven er moderat stor.

Arnold (1964), Chase & Bulgren (1971), Everitt (1979), Hopkins & Clay (1963) og Mardia (1971) har undersøgt robustheden af Hotellings T^2-test over for ikke-normalitet, når stikprøven er relativ lille. En del af disse undersøgelser behandler alene Hotellings en-stikprøve T^2, d.v.s. $T^2 = n(\bar{X}-\mu)'\hat{\Sigma}_x^{-1}(\bar{X}-\mu)$, men da den her behandlede situation kan reduceres til en sådan (parvise observationer), er disse medtaget her. I dette tilfælde vil $\bar{X} = \bar{X}_{i.}-\bar{X}_{i'.}$ dog altid være symmetrisk fordelt, blot $\bar{X}_{i.}$ og $\bar{X}_{i'.}$ er ensfordelte. Nogle resultater fra disse undersøgelser er anført i tabel 2.3.1.

Chase & Bulgren (1971) konkluderer, at for meget skæve fordelinger er Hotellings en-stikprøve T^2-test ikke tilfredsstillende. For den logaritmiske normalfordeling og exponentialfordelingen synes anvendelsen at være uacceptabel for utransformerede data, selv med en stikprøvestørrelse på 20, mens anvendelsen synes at være acceptabel for de øvrige undersøgte fordelinger.

Dette synes at være i overensstemmelse med Arnold (1964) og Hopkins & Clay (1963), som alle har undersøgt symmetriske fordelinger og der fundet, at Hotellings T^2-test er robust over for ikke-normalitet selv ved små stikprøver. Mardia (1971) fandt, at Hotellings T^2 for sammenligning af to stikprøvers middelværdier er robust over for alle de undersøgte former for ikke-normalitet - også når den aktuelle fordeling var skæv (exponential-fordeling), hvilket sikkert skyldes den førnævnte omstændighed, at differencen mellem ensfordelte (herunder skævt fordelte) stokastiske variable vil være symmetrisk fordelte.

Everitt (1979) fandt resultater, som synes i god overensstemmelse med ovenstående, dog antyder hans resultater, at Hotel-

Kilde	Fordeling	Stik-prøver	Stikprøve-størrelse	Antal ka-rakterer	Aktuel type I-fejl, % α=0.01	Aktuel type I-fejl, % α=0.05
Arnold, 64	ligefordeling	1	4,6,8	2	1.6-1.8	6.0-7.0
-	dobbelt exponential	1	8	2	0.5	4.2
Chase & Bulgren, 71	ligefordeling	1	5,10,20	2	1.1-1.8	5.1-6.8
-	exponential	1	5,10,20	2	2.5-6.0	7.2-13.5
-	log-normal	1	5,10,20	2	8.1-12.2	18.2-22.1
-	gamma-$\chi^2(8)$	1	5,10,20	2	1.6-1.9	6.8-7.2
-	dobbelt exponential	1	5,10,20	2	0.5-0.6	3.4-4.4
Everitt, 79	ligefordeling	1	20	8	1.8	7.1
-	exponential	1	20	8	4.2	13.1
-	log-normal	1	20	8	16.5	32.0
-	ligefordeling	2	20	2	1.0	5.0
-	ligefordeling	2	20	8	1.5	5.3
-	exponential	2	20	2	0.8	4.2
-	exponential	2	20	8	0.8	4.4
-	log-normal	2	20	2	0.3	3.8
-	log-normal	2	20	4	0.5	3.2
-	log-normal	2	20	6	0.5	3.2
-	log-normal	2	20	8	0.2	3.5
Hopkins & Clay, 63	uspec. (leptokurtisk)	2	5,10,20	2	-	3.7-5.9
-	uspec. (leptokurtisk)	2	5,10,20	2	-	3.2-4.1
Mardia, 71	exponential	2	5	2	-	4.0
-	ligefordeling	2	5	2	-	4.9-5.8
-	blandinger af normalfordelinger	2	5	2	-	3.2-4.0
-	uspecificeret	2	10	2	-	4.6-5.4
-	uspecificeret	2	10	8	-	4.5-5.5

Tabel 2.3.1 Undersøgelse over robustheden af Hotellings T^2-test over for ikke-normalitet.

lings T^2-test for sammenligning af to stikprøvers middelværdier giver lidt for få signifikante udslag, når de registrerede variable er skævt fordelte.

Mardia (1971) anfører, at jo større p (antal karakterer) er, jo større stikprøver må forventes at være nødvendige, for at få samme grad af robusthed som for de undersøgte p-værdier. Everitt's resultater synes ikke at vise en sådan sammenhæng.

Hotellings T^2 for sammenligning af to stikprøvers middelværdier synes således at være robust overfor de mest nærliggende former for ikke-normalitet.

Robustheden af Hotellings T^2 over for uens varianser er undersøgt af bl.a. Ito & Schull (1964), Holloway & Dunn (1967) og Hopkins & Clay (1963), der samstemmende finder, at Hotellings T^2 er robust over for moderate grader af uens varianser, blot de to stikprøver er lige store. Disse undersøgelser adskiller sig imidlertid alle fra den testsituation, som skal behandles her, ved at der i det foreslåede test benyttes en poolet variansmatrix baseret på flere sorter, hvoraf kun to indgår i den aktuelle T^2-test. Dette har to umiddelbare konsekvenser:

1) Vi kan få et fejlbehæftet resultat, selv om de to sorter, der testes, har ens varians - nemlig hvis en eller flere af de øvrige sorter i forsøget har en anden varians, thi i så fald vil den poolede variansmatrix ikke være et korrekt estimat for variansen i de to sorter, der testes.

2) I de tilfælde, hvor sorterne i forsøget kan deles i to lige store grupper med hver sin varians, vil testet - for to sorter i hver sin gruppe - være bedre end det, stikprøvestørrelsen antyder. Dette skyldes, at den poolede variansmatrix i så fald vil være et bedre estimat for $\mathrm{Var}(\bar{X}_{1.}-\bar{X}_{2.}) = \frac{1}{n}(\Sigma_1+\Sigma_2)$ end den, der kun er baseret på de to sorters stikprøver.

Rao (1958) og Goodman(1968a) fandt begge, at variansmatricerne ikke var ens for alle grupper. Rao har ikke bemærket noget om betydningen heraf, hvorimod Goodman (1968a) har sammenlignet resultater fundet ved beregning på de oprindelige variable med resultater af beregninger efter at nogle karakterer var transformeret, således at noget af heterogeniteten var fjernet. Han fandt, at transformationerne havde meget lille effekt på de relative afstande (og derfor at stærkt signifikant heterogenitet - målt med den flerdimensionale udvidelse af Bartletts test - kun havde en lille effekt på analysen).

Resultaterne af de her fremtrukne undersøgelser af robusthed ligner på mange måder de tilsvarende for Students t-test (se Scheffé(1959) kapitel 10).

2.3.3 Teststyrke

I det foregående har vi betragtet sandsynligheden for at forkaste H_{0i} ved en fejltagelse - d.v.s. sandsynligheden for type I-fejlen. Det har imidlertid også interesse at kende noget til sandsynligheden for at acceptere H_{0i} ved en fejltagelse - d.v.s. sandsynligheden for type II-fejlen. Denne er imidlertid afhængig af, hvor forskellig den nyanmeldte sort er fra referencesorterne. Er den nyanmeldte sort meget forskellig fra alle referencesorter, er sandsynligheden for fejlagtigt at acceptere H_{0i} lille, mens den omvendt er stor, hvis den nyanmeldte sort kun er lidt forskellig fra en eller flere af referencesorterne. I stedet for at betragte sandsynligheden for type II-fejlen, kan vi betragte sandsynligheden for, at H_{0i} forkastes, når H_{1i} er sand. Denne sandsynlighed kaldes teststyrken og er givet ved 1 minus sandsynligheden for type II-fejlen. Som mål for, hvor forskellige to sorter (i og i') er, vil vi benytte Mahalanobis afstand, $\delta_{i,i'}$, som er defineret i (2.3.5), hvor μ_i, $\mu_{i'}$ og Σ_x er defineret i (2.3.1). Som tidligere nævnt (2.3.3) kan $H_{0i,i'}$ testes ved $F_{i,i'}$, hvor $F_{i,i'}$ under $H_{1i,i'}$ er ikke-central F-fordelt. Ikke-centralitetets parametre er givet ved

$$\lambda_{i,i'} = \frac{n}{2}\,\delta^2_{i,i'}$$

(Rao, 1973 p 541-542). Kalder vi sandsynligheden for, at den nyanmeldte sort, i, bliver betragtet som forskellig fra referencesort, i', i et enkelt forsøg for $\beta_{i,i'}$, har vi (Morrison, 1976 p 160):

$$\beta_{i,i'} = P(F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1}) \qquad (3.2.12)$$

altså sandsynligheden at $F_{i,i'}$ er større end en bestemt værdi ($F_{1-\alpha,p,m-p+1}$), der er valgt således, at $\beta_{i,i'}$ netop er lig α, hvis de to sorter er identiske (jvf. teksten under (2.3.3)).

Kalder vi sandsynligheden for at den nyanmeldte sort, i, bliver betragtet som forskellig fra alle referencesorter i et enkelt forsøg for β_i, kan vi skrive (appendix side A13-A14):

$$k_i\beta_{i,i_0} - (k_i-1) \leq \sum_{i'=1}^{k_i} \beta_{i,i'} - (k_i-1) \leq \beta_i \leq \beta_{i,i_0} \qquad (2.3.13)$$

hvor i_0 er den referencesort, som ligner den nyanmeldte sort mest, når graden af lighed måles ved Mahalanobis afstand (2.3. 5). Udtrykket i (2.3.13) giver ikke nogen eksakt værdi for β_i, men alene nedre og øvre grænser. For små værdier af $\{\beta_{i,i'}\}$ eller en stor værdi af k_i vil den nedre grænse dog være af meget begrænset værdi, idet denne da vil nærme sig 0 eller endog blive negativ.

I figur 2.3.2 er teststyrken for en enkelt delhypotese anført som funktion af $\lambda_{i,i'} = \frac{n}{2}\,\delta^2_{i,i'}$, p = antal karakterer, m = antal frihedsgrader ved beregning af $\hat{\Sigma}_x$ og α er testniveau. Ved beregningerne er den ikke-centrale F-fordeling approximeret ved en central F-fordeling (jvf. Scheffé, 1959 p 414):

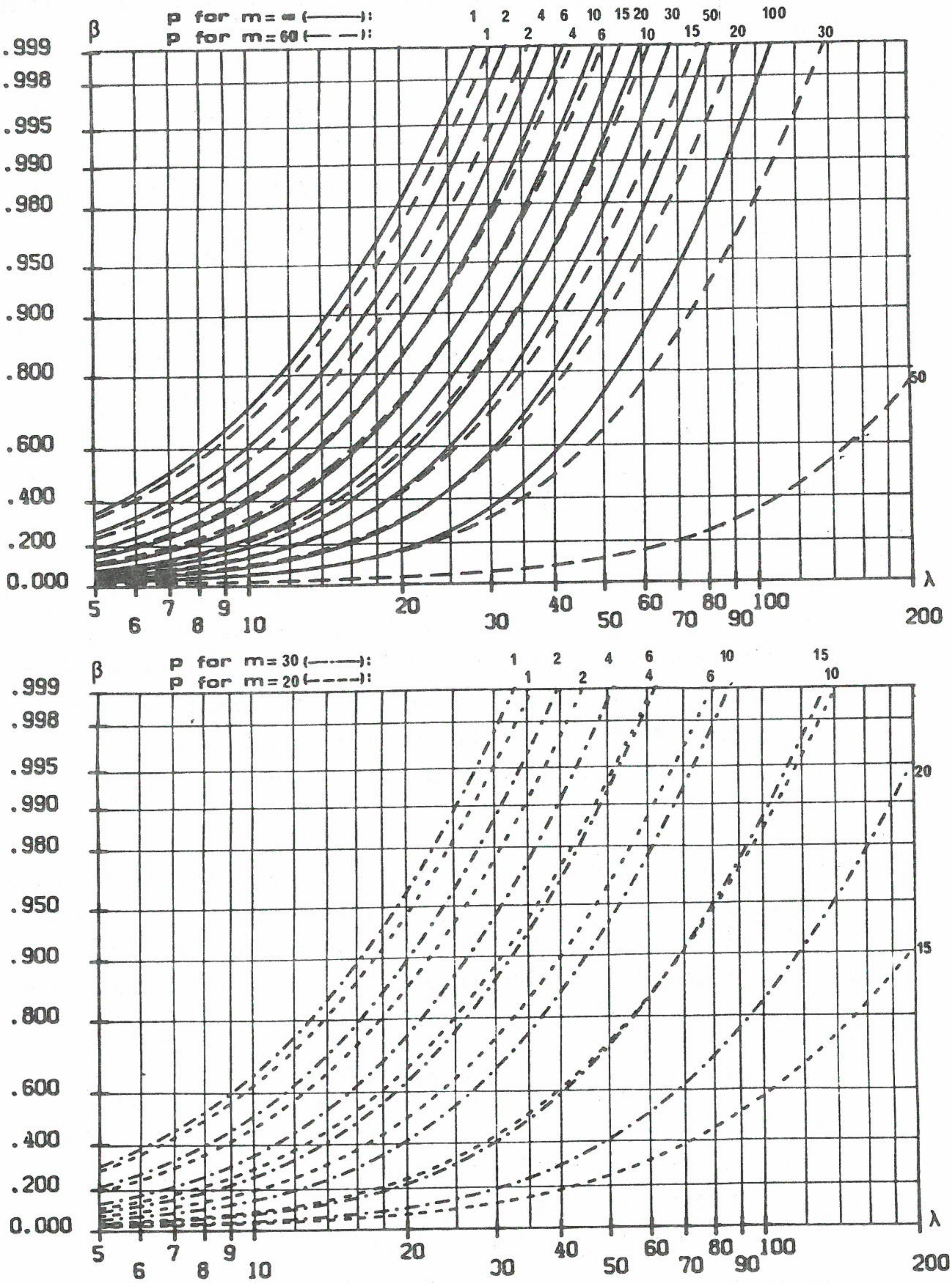
$$P(F' > F_{1-\alpha,p,m-p+1}) \approx P(F > \frac{p}{c_0 p_0} F_{1-\alpha,p,m-p+1}) ,$$

hvor F' er ikke-central P-fordelt $(p,m-p+1,\lambda_{i,i'})$

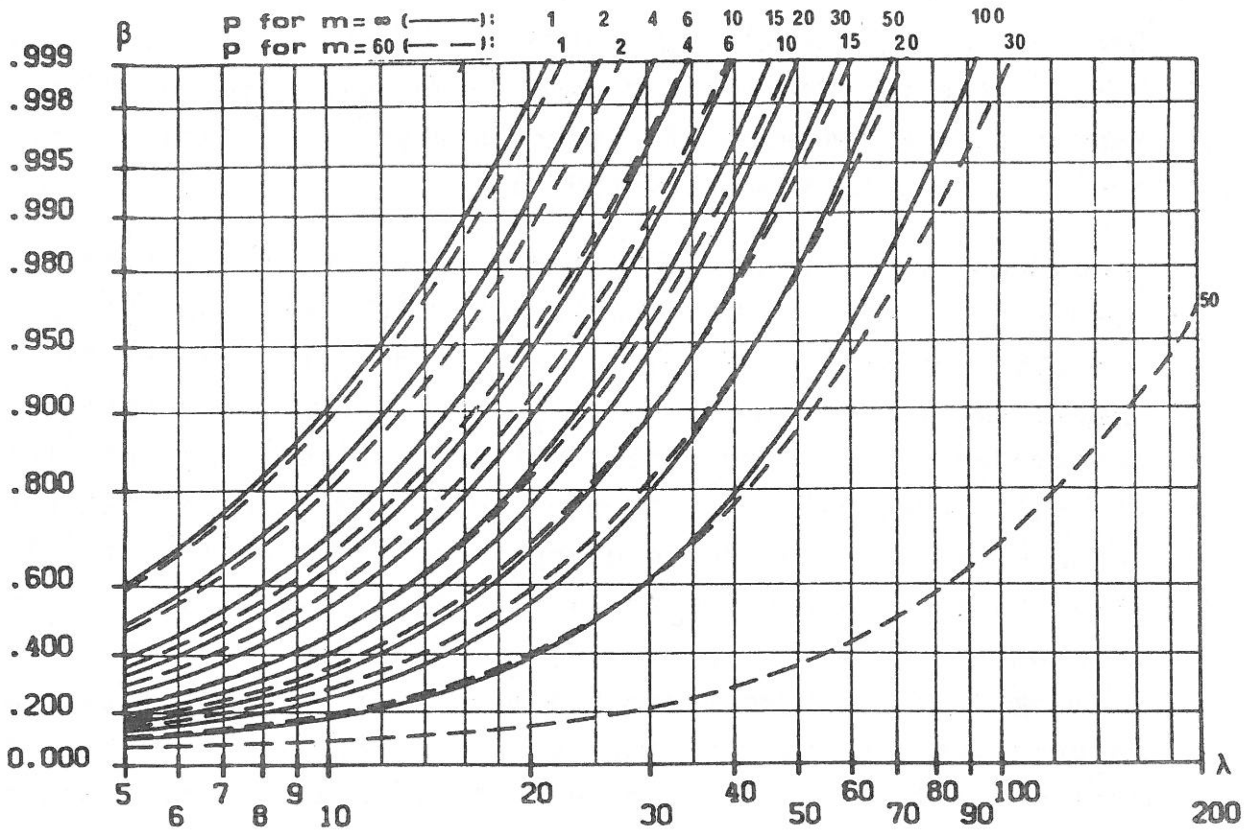
F er central F-fordelt $(p_0,m-p+1)$

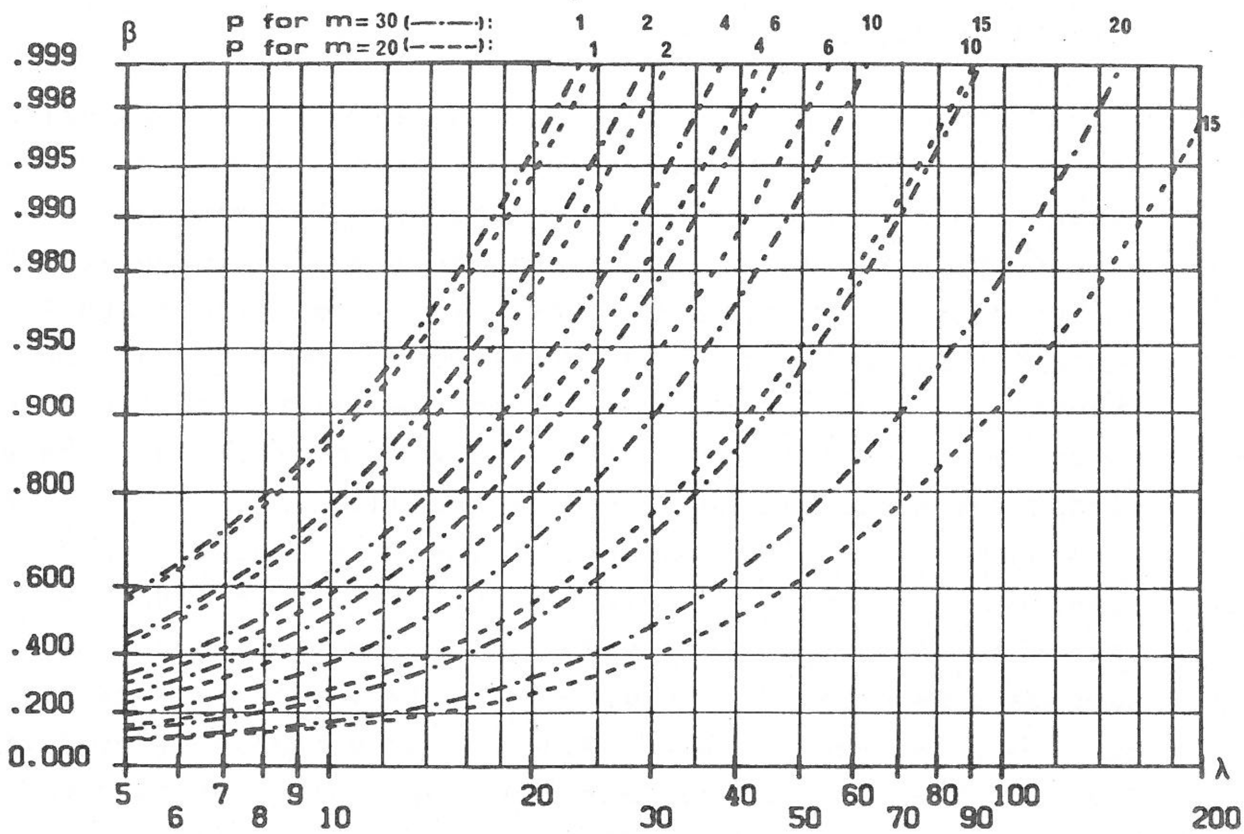
$c_0 = (p + 2\lambda_{i,i'})/(p + \lambda_{i,i'})$

$p_0 = (p + \lambda_{i,i'})^2/(p + 2\lambda_{i,i'})$.



Figur 2.3.2a Teststyrker for delhypoteser $H_{0i,i'}$ testet ved Hotellings T^2-test på 1%-nivået.





Figur 2.3.2b Teststyrke ($\beta_{i,i'}$) for delhypotesen $H_{0i,i'}$, testet ved Hotellings T^2-test på 5%-niveauet.

For p = 1,2,3,4,5,6,7,8,12 eller 24 kan de fleste af de i figur 2.3.2 viste sandsynligheder også findes ved interpolation i kurver til bestemmelse af F-testets styrke, således som publiceret af Pearson & Hartley (1972).

Figurerne viser, at styrken af det multivariate test for fastholdt $\lambda_{i,i'}$ falder, når antal karakterer øges - og falder meget stærkt, når p nærmer sig m, d.v.s. når der er relativt få frihedsgrader til bestemmelse af $\hat{\Sigma}_x$. Har vi et stort antal frihedsgrader, viser figurerne at styrken stiger, når antallet af variable øges, hvis blot forøgelsen af ikke-centralitetsparameteren er så stor, at denne udtrykt pr. karakter ikke formindskes. Således er styrken for $\alpha = 0.01$, $p = 4$, $\lambda_{i,i'} = 20$ og $m = 60$ samt for $\alpha = 0.01$, $p = 6$, $\lambda_{i,i'} = 30$ og $m = 60$ henholdsvis 0.84 og 0.94. I begge disse tilfælde er ikke-centralitetsparameteren udtrykt pr. karakter den samme ($\lambda_{i,i'}/p = 5$). I det aktuelle tilfælde vil styrken øges ved inddragelse af de sidste 4 karakterer, blot ikke-centralitetsparameteren herved øges fra 20 til ca. 23.5.

Under forudsætning af at man kan fastlægge, hvor forskellige to sorter skal være, før man er interesseret i at kunne adskille disse, kan figurerne benyttes ved forsøgsplanlægning. En sådan anvendelse kan belyses ved et eksempel: Man påtænker at udføre et forsøg, hvor en nyanmeldt sort skal sammenlignes med 10 referencesorter ved hjælp af 10 karakterer. Såfremt Mahalanobis afstande, $\delta_{i,i'}$-værdierne, mellem den nyanmeldte sort og referencesorter alle er større end eller lig 9, ønsker man at have mindst 95% sandsynlighed for at kunne adskille sorten fra referencesorterne på 1%-niveauet i et enkelt forsøg. Anlægges forsøget med tre blokke, har vi $m = 20$. Såfremt Mahalanobis afstand, $\delta_{i,}$ til den referencesort, som ligner den nyanmeldte sort mest netop er 9, får vi $\lambda_{i,i_0} = 121.5$. Af figuren får vi $\beta_{i,i_0} \approx .996$. Ved hjælp af (2.3.13) får vi følgende grænser for β_i: $.96 \leq \beta_i \leq .996$, hvilket netop opfylder kravet. I modsat fald ville det være nødvendigt at gentage beregningerne med et ændret antal blokke. Er δ_{i,i_0} større end 9, vil såvel øvre som nedre grænse for β_i blive større. For eksempel får vi for $\delta_{i,i_0} = 9.6$: $.99 \leq \beta_i \leq .999$.

Under tiden er det muligt at beregne en højere nedre grænse for β_i. Dette er f.eks. tilfældet, hvis referencesorterne vides at gruppere sig i et antal grupper, som indbyrdes er meget forskellige, idet man da kan antage:

$$\beta_{i,i'} = \begin{cases} 1 & \text{hvis i og i' tilhører forskellige grupper} \\ \geq \beta_{i,i_0} & \text{hvis i og i' tilhører samme gruppe} \end{cases}$$

Grupperer referencesorterne i ovennævnte eksempel sig for eksempel i 2 grupper med henholdsvis 4 og 6 sorter i de to grupper, får vi for $\delta_{i,i_0} = 9$ ved brug af (2.3.13):

a) den nyanmeldte sort er i gruppen med 4 referencesorter
$\beta_i \geq 6 * 1 + 4 * \beta_{i,i_0} - (10-1) = 6 * 1 + 4 * 0.996-9 =$
.984

b) den nyanmeldte sort er i gruppen med 6 referencesorter
$\beta_i \geq 4 * 1 + 6 * \beta_{i,i_0} - (10-1) = 4 * 1 + 6 * 0.996-9 =$
.976.

Såfremt referencesorterne kan deles i sådanne to grupper, vil den nedre grænse for β_i blive hævet fra ca. 96% til ca. 98%. Dette kan undertiden bevirke, at man kan anvende et mindre forsøg, end det man skulle benytte, hvis sorterne ikke kunne deles i grupper. I det foreliggende eksempel vil man dog skulle benytte 3 blokke i begge tilfælde.

2.3.4 Sammenligning med en række univariable test

Testet for $H_{0i,i'}$ kan også udføres ved at teste hver af karaktererne for sig - for eksempel ved p Student's t-test. For at sikre, at testniveauet ikke bliver større end den nominelle værdi α, vil vi forkaste $H_{0i,i'}$, hvis mindst en af disse p Student's t-variable overstiger $t_{1-\alpha/2p,m}$, hvor $t_{1-\alpha/2p,m}$ er $(1-\alpha/2p)$-fraktilen i en t-fordeling med m frihedsgrader. Da kvadratet på en t-variabel er F-fordelt, og da vi er interesseret i at teste to-sidigt, vil vi i stedet benytte kvadratet på t-variablene, defineret ved:

$$F^{\ell}_{i,i'} = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{\bar{X}^{\ell}_{i.} - \bar{X}^{\ell}_{i'.}}{s^{\ell}}\right)^2 \qquad (2.3.14)$$

hvor $\ell = 1,2,\ldots,p$, karakternummer

$\bar{X}^{\ell}_{i.}$ = gennemsnit af karakter ℓ for sort i

s^{ℓ} = estimat for spredninger på karakter ℓ

Under $H_{1i,i'}$ vil $F^{\ell}_{i,i'}$ - betragtet enkeltvis - være ikke central F-fordelt med parametrene $(1,m,\lambda^{\ell}_{i,i'})$, hvor

$$\lambda^{\ell}_{i,i'} = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{\mu^{\ell}_{i} - \mu^{\ell}_{i'}}{\sigma^{\ell}}\right)^2$$

Notationen for μ^{ℓ}_{i} og σ^{ℓ} følger de tilsvarende for $\bar{X}^{\ell}_{i.}$ og s^{ℓ}.

For at beregne styrken af denne test, er det imidlertid ikke nok at kende $\mu^{\ell}_{i}, \mu^{\ell}_{i'}$ og σ^{ℓ} for hver enkelt karakter, men det er nødvendigt også at kende korrelationerne mellem alle par af karakterer for at kunne tage hensyn til disse.

Antager vi nu at karaktererne er uafhængige, bliver testene uafhængige. Desuden får vi, at ikke-centralitetsparameteren i det multivariate tilfælde (afsnit 2.3.3) bliver lig summen af ikke-centralitetsparametrene for de p test af karaktererne enkeltvis, altså

$$\lambda_{i,i'} = \sum_{\ell=1}^{p} \lambda^{\ell}_{i,i'} .$$

Teststyrken for testen kan nu udregnes ved

$$\beta_{i,i'} = 1 - \prod_{\ell=1}^{p} P(F^{\ell}_{i,i'} < F_{1-\alpha/p,1,m}) \qquad (2.3.15)$$

Antager vi at $\lambda^{1}_{i,i'} = \lambda^{2}_{i,i'} = \ldots = \lambda^{p}_{i,i'} = \lambda_{i,i'}/p$, simplificeres dette udtryk til:

$$\beta_{i,i'} = 1 - P(F^1_{i,i'} < F_{1-\alpha/p,1,m})^p \qquad (2.3.16)$$

hvor $F^1_{i,i'}$ er ikke-central F-fordelt $(1,m,\lambda_{i,i'}/p)$. I figur 2.3.3 er styrken af denne test vist for nogle værdier af α, m og p som funktion af $\lambda_{i,i'}$.

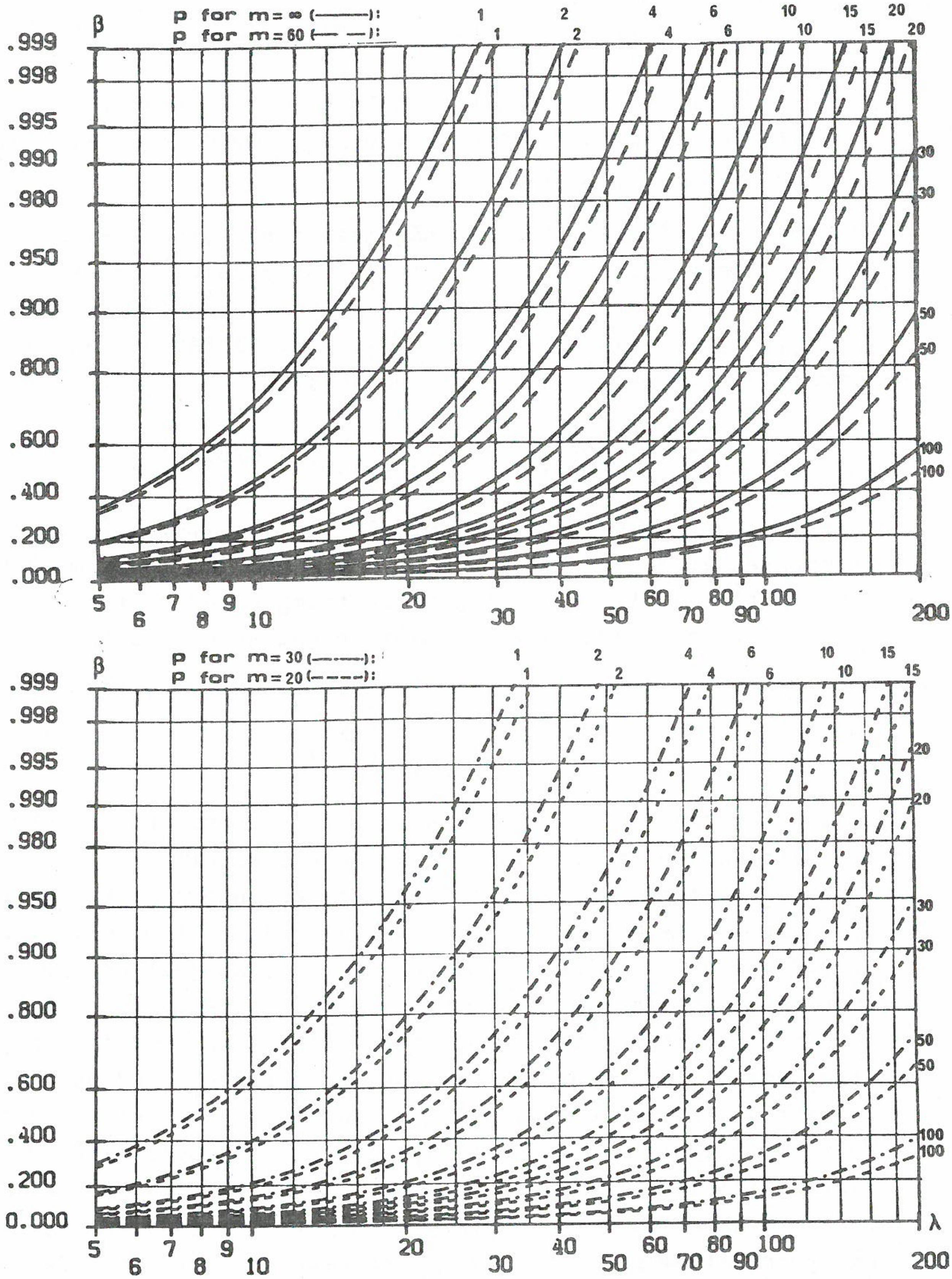
Et andet ydertilfælde har vi, når hele forskellen mellem de to sorter ligger i en enkelt karakter - for eksempel karakter 1. Med uændret sum af ikke-centralitetsparametrene får vi da $\lambda^1_{i,i'} = \lambda_{i,i'}$; $\lambda^2_{i,i'} = \lambda^3_{i,i'} = \dots = \lambda^p_{i,i'} = 0$. Vi får da, at udtrykket for styrken i (2.3.15) kan skrives:

$$\beta_{i,i'} = 1 - P(F^1_{i,i'} < F_{1-\alpha/p,1,m})(1-\alpha/p)^{p-1} \qquad (2.3.17)$$

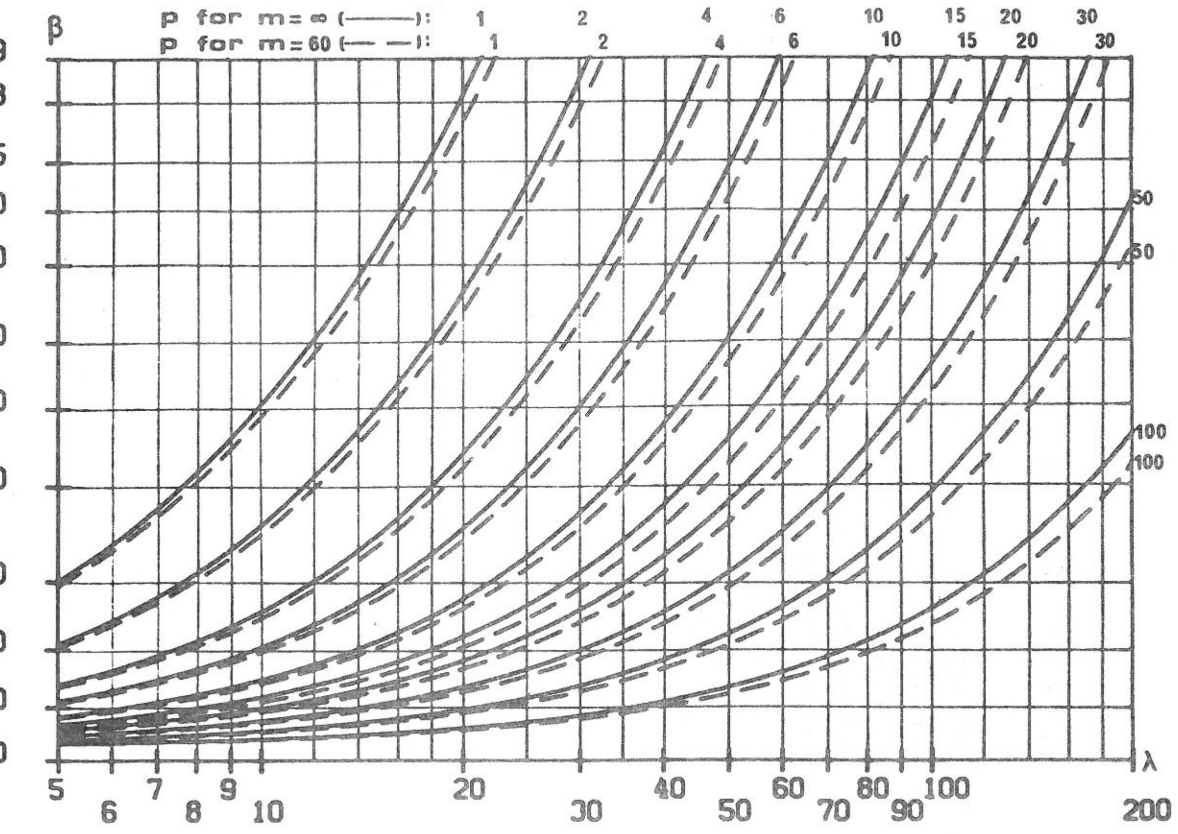
hvor $F^1_{i,i'}$ er ikke-central F-fordelt $(1,m,\lambda_{i,i'})$. I figur 2.3.4 er styrken af denne test vist for nogle værdier af α, m og p som funktion af $\lambda_{i,i'}$. Af figurerne fremgår det at teststyrken for $H_{0i,i'}$ ved anvendelse af en række univariate test for fastholdt

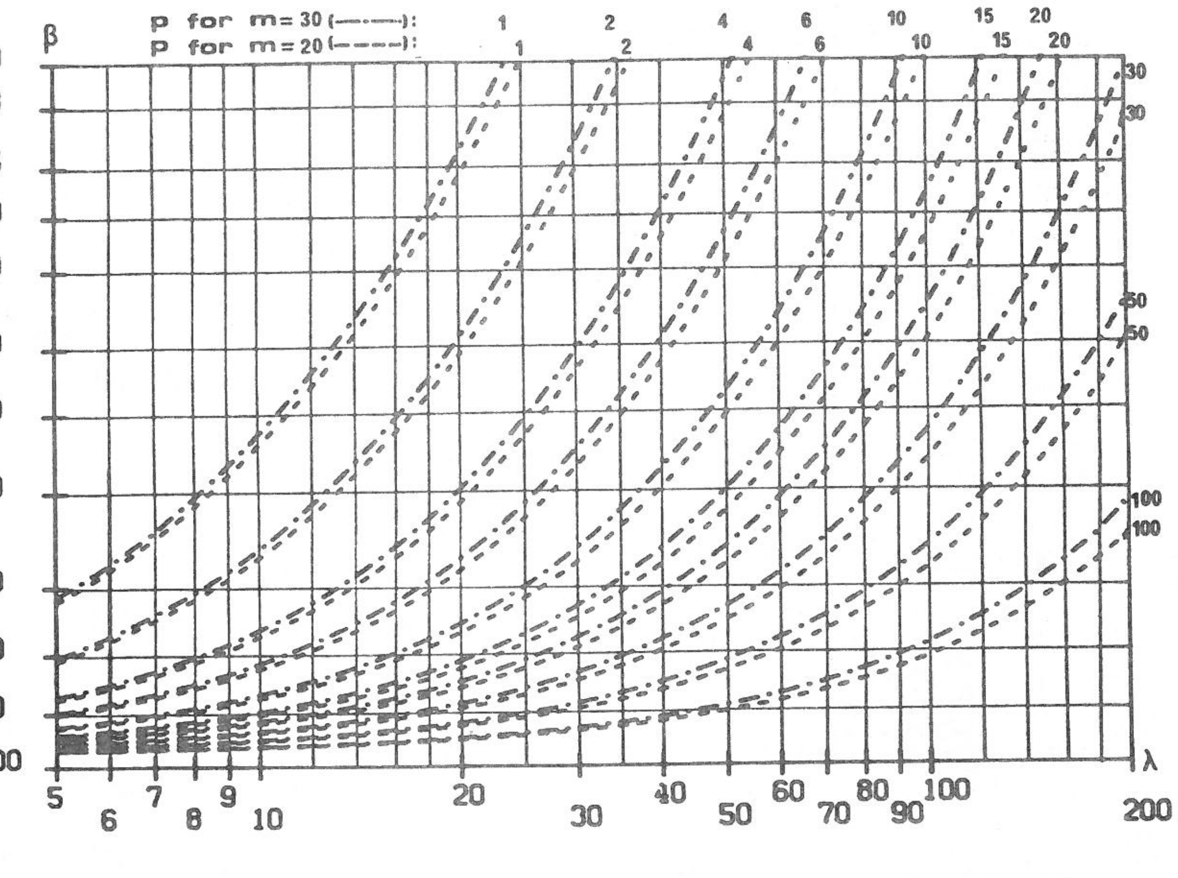
$$\lambda_{i,i'} = \sum_{\ell}^{p} \lambda^{\ell}_{i,i'}$$

falder med øget antal karakterer. Testen udført ved de univariate test har en større styrke, når hele forskellen mellem de to sorter er samlet i en enkelt karakter, end når alle karakterer bidrager lige meget (målt ved $(\mu^{\ell}_i - \mu^{\ell}_{i'})/\sigma^{\ell}$))til forskellen. Den multivariate test (figur 2.3.2) synes sammenlignet hermed at indtage en intermediær stilling, når m er rimelig stor. Således er det bedre end de univariate test, når karaktererne bidrager lige meget til forskellen, mens det er dårligere end de univariate test, når hele forskellen er samlet i en enkelt karakter. Dette må betyde, at den multivariate test især vil være velegnet ved adskillelse af sorter, som adskiller sig fra hinanden på mange karakterer, men hvor forskellene for de enkelte karakterer er relativt små. Omvendt vil en række univariate test være bedre end den multivariate test, hvis sorterne adskiller sig fra hinanden kun ved en enkelt karakter, som er uafhængig af de øvrige.

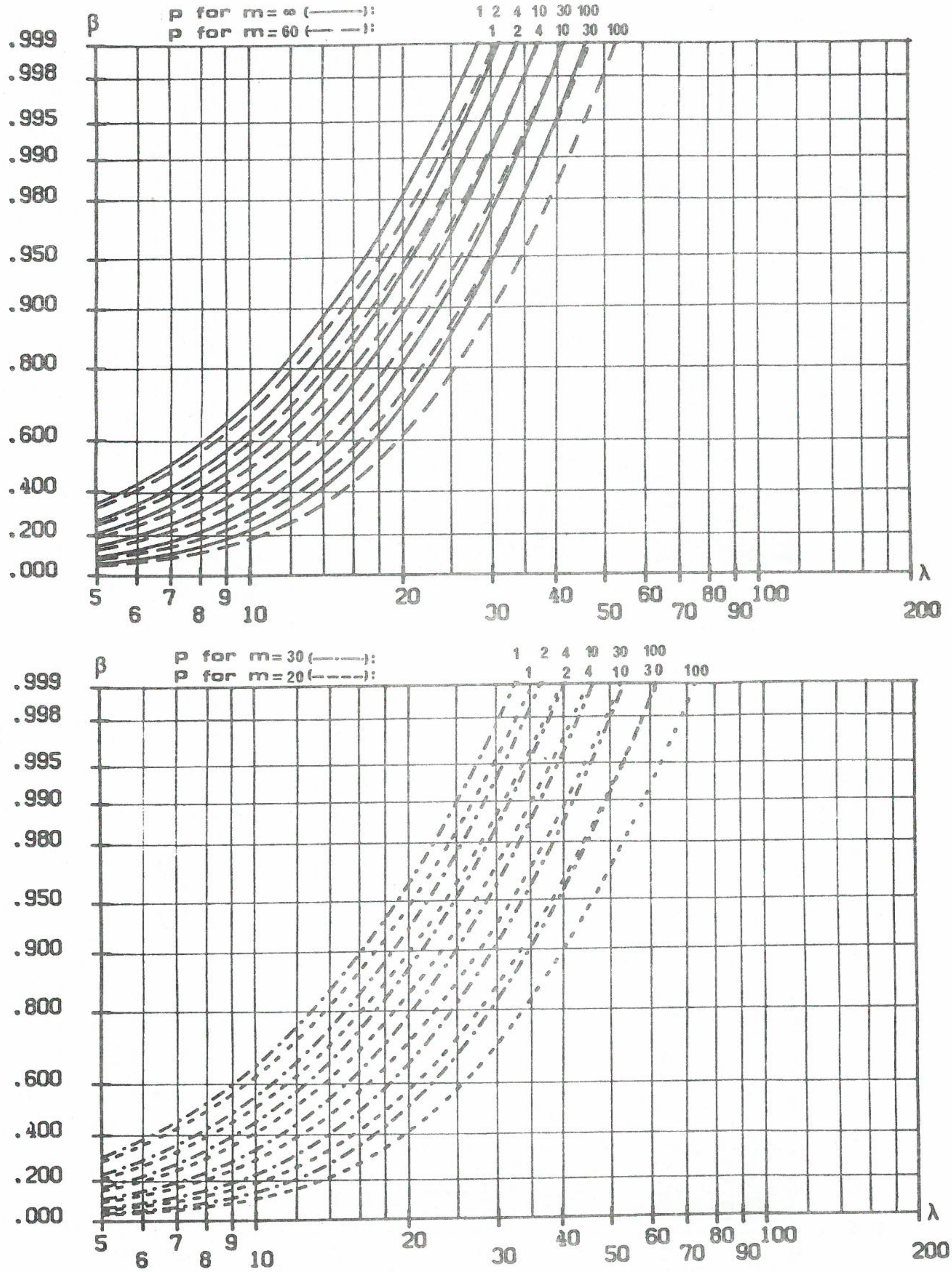


Figur 2.3.3a Teststyrken for delhypotesen $H_{0i,i}$, testet karaktervis ved F-værdier $F_{1-0.01/p,p,m}$ som kritisk værdi. Karaktererne er indbyrdes uafhængige og har ens ikke-centralitetsparametre.

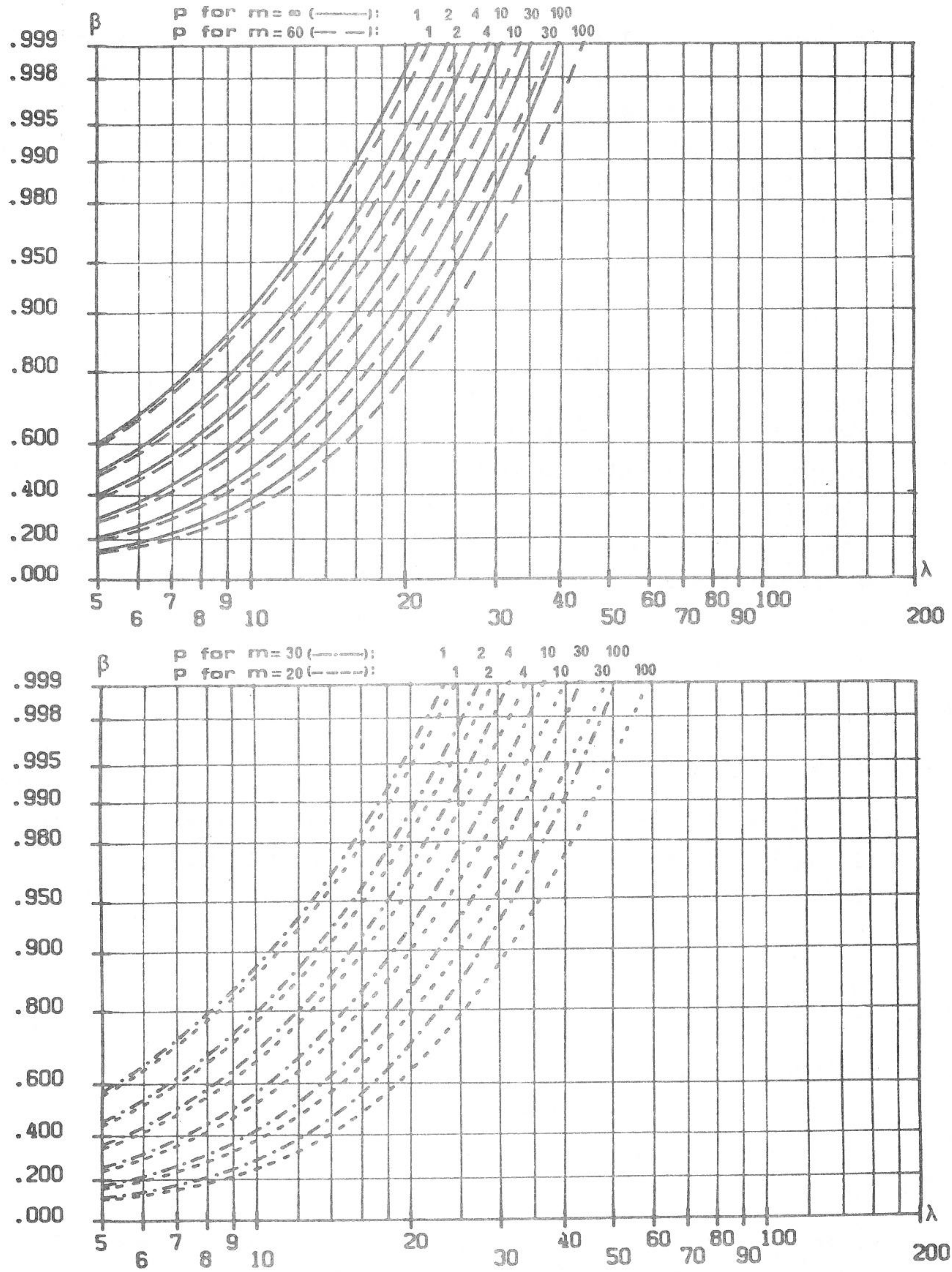




Figur 2.3.3b Teststyrken for delhypotesen $H_{0i.i'}$, testet karaktervis ved F-værdier med $F_{1-0.05/p,p,m}$ som kritisk værdi. Karaktererne er indbyrdes uafhængige og har ens ikke-centralitetspar.



Figur 2.3.4a Teststyrken for delhypotesen $H_{0i,i'}$, testet karaktervis ved F-værdier med $F_{1-0.01/p,p,m}$ som kritisk værdi. Karaktererne er indbyrdes uafhængige, og sorterne er kun forskellige for en af de benyttede karakterer.



Figur 2.3.4b Teststyrken for delhypotesen $H_{0i,i'}$, testet karaktervis ved F-tests med $F_{1-0.05/p,p,m}$ som kritisk værdi. Karaktererne er indbyrdes uafhængige, og sorterne adskiller sig kun på en af de benyttede karakterer.

De beregnede styrker i figur 2.3.3 og 2.3.4 er kun anvendelige, hvis karaktererne er uafhængige. Da sandsynligheden for at en af flere mulige hændelser indtræffer er større end eller lig sandsynligheden for at den mest sandsynlige af disse indtræffer, får vi - uanset korrelationer mellem karakterer - at:

$$\beta_{i,i'} > \max_{\ell=1,2,\ldots,p} \beta^{\ell}_{i,i'} \qquad (2.3.18)$$

hvor $\beta^{\ell}_{i,i'}$ er sandsynligheden for at karakter ℓ udviser signifikant forskel. Styrken af den tilsvarende multivariate test vil stadig være givet som anført i afsnit 2.3.3, omend der nu ikke findes nogen direkte sammenhæng mellem ikke-centralitetsparametrene for enkelttest af karaktererne og ikke-centralitetsparameteren for den multivariate test. Afhængig af Σ_x vil $\lambda_{i,i'}$ være større eller mindre end

$$\sum_{\ell=1}^{p} \lambda^{\ell}_{i,i'} \; .$$

Er $\lambda_{i,i'} > \sum_{\ell=1}^{p} \lambda^{\ell}_{i,i'}$ vil korrelationerne mellem karaktererne forbedre styrken af den multivariate test i forhold til uafhængige karakterer med de samme marginale fordelinger, og omvendt vil styrken af den multivariate test være dårligere end det tilsvarende med uafhængige karakterer, hvis

$$\lambda_{i,i'} < \sum_{\ell=1}^{p} \lambda^{\ell}_{i,i'} \; .$$

Betingelserne, hvorunder

$$\lambda_{i,i'} > \sum_{\ell=1}^{p} \lambda^{\ell}_{i,i'} \; ,$$

er for p = 2 og 3 samt for specielle korrelationsmatricer for p > 3 givet af Cochran (1964).

2.3.5 Flere multivariate test

Undertiden kan der være grund til at opdele en række karakterer i grupper. Det kan være tilfældet i følgende situationer:

1) karaktererne er ikke registreret på de samme enheder, og det er derfor ikke muligt at estimere variansmatricen for alle karakterer under et

2) karakterene falder logisk i grupper, som det er ønskeligt at undersøge hver for sig

3) der er flere karakterer i forsøget, end der er frihedsgrader til bestemmelse af $\hat{\Sigma}_x$ eller differencen mellem antal frihedsgrader og antal karakterer er meget lille, og den samlede tests styrke derfor meget dårligt (jvf. figur 2.3.2).

Antager vi, at karaktererne er inddelt i q grupper, kan vi opstille følgende forkastelsesområde for $H_{0i,i'}$: Forkast $H_{0i,i'}$ hvis $H^s_{0i,i'}$: $\mu^s_i = \mu^s_{i'}$ $(s = 1,2,...,q)$ forkastes for mindst et s, hvor μ^s_i er en vektor indeholdende middelværdierne af karaktererne i gruppe s for den i'te sort. Hypoteserne $H^s_{0i,i'}$ kan testes enkeltvis ved en test svarende til en test for alle karakterer under et (2.3.3), blot må vi her vælge en anden fraktil i F-fordeling, idet vi får en situation, som ligner den tilsvarende, når vi tester karaktererne enkeltvis. Vi forkaster $H^s_{0i,i'}$ og dermed $H_{0i,i'}$, hvis

$$F^s_{i,i'} > F_{1-\alpha_s, p_s, m-p_s+1} \tag{2.3.19}$$

hvor $F^s_{i,i'} = \dfrac{(m-p_s+1)}{m \cdot p_s} \cdot \dfrac{n}{2}(\bar{X}^s_{i.} - \bar{X}^s_{i'.})' \hat{\Sigma}^{s\,-1}_x (\bar{X}^s_{i.} - \bar{X}^s_{i'.})$

p_s = antal karakterer i gruppe s

$\bar{X}^s_{i.}$ = vektor indeholdende gennemsnit af karaktererne i gruppe s for sort i.

$\hat{\Sigma}^s_x$ = estimat for variansmatricen for karaktererne i gruppe s.

Vælger vi α_s således at $\sum_{s=1}^{q} \alpha_s = \alpha$, vil testet for $H_{0i,i'}$ have et niveau, som er mindre end eller lig α (appendix side A15 -A16).

Her vil det nok være rimeligt at lade α_s være proportional med antal karakterer i gruppe s, og vi får da

$$\alpha_s = \frac{p_s}{p} \alpha,$$

hvor $p = \sum_{s=1}^{q} p_s$ er det totale antal karakterer.

Kan vi antage, at de q gruppetest er uafhængige - hvilket ofte vil være tilfældet i situation 1) ovenfor - kan vi udføre en skarpere test, idet vi nu kan vælge α_s, således at

$$\prod_{s=1}^{q} (1-\alpha_s) = 1-\alpha .$$

Lader vi α_s være bestemt ved $\alpha_s = 1-(1-\alpha)^{p_s/p}$, får vi at testniveauet bliver α (appendix side A15-A16).

Under forudsætningen af, at karaktererne i de enkelte grupper er indbyrdes uafhængige, kan vi addere vort mål for sortsforskellighed (formel (2.3.8)) for hver gruppe til et kombineret mål for sortsforskellighed, altså:

$$\tilde{\delta}^2_{i,i'} = \sum_{s=1}^{q} \tilde{\delta}^{s^2}_{i,i'}, \tag{2.3.20}$$

hvor $\tilde{\delta}^{s^2}_{i,i'}$ er beregnet for hver gruppe analogt til $\tilde{\delta}^2_{i,i'}$ i (2.3.8).

3. ENSARTETHEDSAFPRØVNING

Ved ensartethedsafprøvningen skal man undersøge, om nyanmeldte sorter er tilstrækkelig ensartede. Da variationen inden for en sort vil være afhængig af f.eks. formeringsmetode og den karakter, man ser på, er det nødvendigt at sammenligne med kendte sorter, som man ved er tilstrækkelig ensartede (Anon, 1974b).

3.1 ENSARTETHEDSMÅL

Et almindeligt anvendt mål for variation, og dermed indirekte et mål for ensartethed, er spredningen på en karakter. Imidlertid er der ofte en sammenhæng mellem en karakters middelværdi og spredning, således at spredningen oftest er større, jo større middelværdien er. Hvis dette er tilfældet, vil det være uheldigt at anvende spredningen på karakteren som et mål for ensartethed, idet sorter med en stor middelværdi også vil have en stor spredning og dermed let bliver betegnet som uensartede. Det vil derfor være ønskeligt at bruge et mål for ensartethed, som er uafhængigt af middelværdien.

Er spredningen proportional med middelværdien - hvilket approximativt er tilfældet, hvis data kan beskrives med en logaritmisk normalfordeling med konstant varians og varierende middelværdier - kan man benytte variationskoefficienten $C_X = \sigma_X/\mu_X$ eller σ_Y, hvor $Y = \ln(X)$. Beregner man sammenhørende værdier af C_X og σ_Y finder man, at disse er tilnærmelsesvis ens for små værdier, mens der for store værdier gælder, at C_X er væsentlig større end σ_Y (se tabel 3.1.1).

σ_Y	0.20	0.40	0.50	0.60	0.80	1.00	1.50
C_X	0.20	0.42	0.53	0.66	0.95	1.31	2.91

Tabel 3.1.1. Sammenhørende værdier af $C_X = \sigma_X/\mu_X$ og σ_Y, når $Y = \ln(X)$ antages normalfordelt.

Er variationskoefficienten lille (mindre end ca. 0.50), er de to mål stort set identiske, og man kan da benytte det mål, der er lettest at arbejde med.

Undertiden finder man, at variansen er proportional med middelværdien. Dette vil være tilfældet, hvis data kan beskrives ved en Poissonfordeling med parameteren λ. I så fald vil σ_Y, hvor $Y = \sqrt{X}$, være approximativt konstant ($\approx\frac{1}{2}$), når λ er meget større end $\frac{1}{4}$, thi da kan variansen på Y udregnes approximativt ved

$$[f'(\mu_X)]^2 \mathrm{Var}(X)$$

(Rudemo, 1979, p 100-101). Med $f(X) = \sqrt{X}$ får vi $\mathrm{Var}(Y) \approx \frac{1}{4\lambda}\lambda = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$.

For data, som kan beskrives ved en binomialfordeling med parametrene n og p, vil sammenhængen antage en anden form. For fastholdt n vil variansen på X være størst, når $p = \frac{1}{2}$ og være mindre, jo nærmere p er 0 eller 1. Her vil σ_Y, hvor $Y = \mathrm{Arcsin}(\sqrt{X/n})$, være approximativt konstant ($1/\sqrt{4n}$), hvis $(n+1)p(1-p)$ er meget større end $\frac{1}{4}$ (jvf. tilsvarende for Poissonfordelingen ovenfor).

Også andre - end de her nævnte - transformationer kan benyttes til at få ensartethedsmål, som er uafhængige af middelværdien.

For visse karakterer kan det være svært eller måske praktisk umuligt at finde egnede transformationer. Man kan da forsøge at beskrive referencesorternes ensartethedsmål som en funktion af disses middelværdier og herefter undersøge, om den nyanmeldte sorts ensartethedsmål med rimelighed kan indplaceres i denne funktion. Dette kan undersøges ved en statistisk test eller mere subjektivt ud fra en figur.

3.2 NUVÆRENDE SANDSYNLIGHED FOR TYPE I-FEJL

Ved den nuværende sammenligningsmetode betragtes en nyanmeldt sort - som nævnt i afsnit 1.2.2 - for uensartet, hvis dens variationskoefficient for en eller flere væsentlige karakterer er større end alle referencesorternes variationskoefficienter i alle afprøvningsår.

Betragter vi et enkelt afprøvningsår og en enkelt karakter, og antager vi at den nyanmeldte sort og alle referencesorter har ens variationskoefficienter (lige ensartede), vil sandsynligheden for at estimatet for den nyanmeldte sorts variationskoefficient er størst være:

$$\frac{1}{k_i + 1}$$

hvor k_i = antal referencesorter på det tidspunkt, hvor den nyanmeldte sort i testes.

Antager vi, at en nyanmeldt sort afprøves i b år og at antallet af referencesorter i de enkelte år er $k_1', k_2', \ldots, k_b'$, bliver sandsynligheden for at den nyanmeldte sort får den højeste variationskoefficient i alle b år for en given karakter, ℓ:

$$P(A^\ell) = \prod_{a=1}^{b} \left[\frac{1}{k_a' + 1}\right] \qquad (3.2.1)$$

hvor A^ℓ betegner hændelsen, at nyanmeldte sort betragtes som uensartet for karakteren ℓ.

For $k_1' = k_2' = \ldots = k_b' = k_0'$ reduceres (3.2.1) til

$$P(A^\ell) = \left[\frac{1}{k_0' + 1}\right]^b \qquad (3.2.2)$$

Da den nyanmeldte sort bliver betragtet som uensartet, hvis mindst en af de væsentlige karakterer giver anledning hertil, bliver sandsynligheden herfor større end angivet i (3.2.1).

Såfremt alle karaktererne kan antages uafhængige, får vi analogt til beregning af (2.1.1) side 16:

$$\alpha_3 = 1 - [1-P(A^\ell)]^p , \qquad (3.2.3)$$

hvor $P(A^{\ell})$ er givet i (3.2.1) eller (3.2.2), p er antal karakterer. I tabel 3.2.1 er α_3 beregnet for $k_0' = 1, 5, 10, 15, 20, 30, 50$ og 100, p = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 50 og 100 samt b = 2 og 3.

Antal år, b	Antal karakterer p	Antal kendte sorter i hver af årene: 1	5	10	15	20	30	50	100
2	1	0.250	0.028	0.008	0.004	0.002	.0010	.0004	.0001
	2	0.437	0.055	0.017	0.008	0.005	.0021	.0008	.0002
	3	0.578	0.081	0.025	0.012	0.007	.0031	.0012	.0003
	4	0.684	0.107	0.033	0.015	0.009	.0042	.0015	.0004
	6	0.822	0.155	0.049	0.023	0.013	.0062	.0023	.0006
	8	0.900	0.202	0.064	0.031	0.018	.0083	.0031	.0008
	10	0.944	0.245	0.080	0.038	0.022	.0104	.0038	.0010
	15	0.987	0.345	0.117	0.057	0.033	.0155	.0058	.0015
	20	0.999	0.431	0.153	0.075	0.044	.0206	.0077	.0020
	25	0.999	0.505	0.187	0.093	0.055	.0257	.0096	.0024
	30	1.000	0.571	0.220	0.110	0.066	.0308	.0115	.0029
	50	1.000	0.755	0.340	0.178	0.107	.0507	.0190	.0049
	100	1.000	0.940	0.564	0.324	0.203	.0989	.0377	.0098
3	1	0.125	0.005	0.001	0.000	0.000	.0000	.0000	.0000
	2	0.234	0.009	0.001	0.001	0.000	.0001	.0000	.0000
	3	0.330	0.014	0.002	0.001	0.000	.0001	.0000	.0000
	4	0.414	0.018	0.003	0.001	0.000	.0001	.0000	.0000
	6	0.551	0.028	0.005	0.001	0.001	.0002	.0000	.0000
	8	0.656	0.036	0.006	0.002	0.001	.0003	.0001	.0000
	10	0.737	0.045	0.007	0.002	0.001	.0003	.0001	.0000
	15	0.865	0.067	0.011	0.004	0.002	.0005	.0001	.0000
	20	0.931	0.087	0.015	0.005	0.002	.0007	.0002	.0000
	25	0.965	0.109	0.019	0.006	0.003	.0008	.0002	.0000
	30	0.982	0.130	0.022	0.007	0.003	.0010	.0002	.0000
	50	0.999	0.207	0.037	0.012	0.005	.0017	.0004	.0000
	100	1.000	0.371	0.072	0.024	0.011	.0034	.0008	.0001

Tabel 3.2.1 Beregnet testniveau, α_3, ved undersøgelse af en nyanmeldt sort for ensartethed ved anvendelse af et antal uafhængige karakterer.

Kan karaktererne ikke antages uafhængige, er det ikke muligt at beregne nogle generelle sandsynligheder for type I-fejlen, α_3, men kun øvre grænser for denne. Vi får analogt til beregning af (2.1.2):

$$\alpha_3 = P(\bigcup_{\ell=1}^{p} A^\ell) \leq p\, P(A^\ell) \tag{3.2.4}$$

hvor $P(A^\ell)$ er givet som tidligere og beregnet i tabel 3.2.1 i de to rækker med $p = 1$.

Er antallet af referencesorter lille, får vi at en nyanmeldt sort alt for ofte bliver betragtet som uensartet, selv om den har samme variationskoefficient som referencesorterne. Dette vil derimod kun ske sjældent, hvis der er mange referencesorter i forsøgene. Eksempelvis vil sandsynligheden for fejlagtigt at betragte en nyanmeldt sort som uensartet være 43% for en to-årig afprøvning med anvendelse af 20 uafhængige karakterer, hvis der er 5 referencesorter i hver af de 2 år, men kun 0.8%, hvis der er 50 referencesorter i forsøgene.

3.3 SAMMENLIGNINGSMETODER

En meget almindelig metode til sammenligning af varianser - og dermed også spredninger - er Bartlett's test for varianshomogenitet. Hvis man kun sammenligner 2 varianser med ens antal frihedsgrader, reduceres Bartlett's test til Fisher's F-test. Begge disse test er imidlertid meget følsomme overfor forudsætningen om normalitet, idet testene vil tendere til at skjule en eventuel variansheterogenitet, hvis fordelingens kurtosis er mindre end nul, og tendere til at "finde" variansheterogenitet, hvor den ikke findes, hvis kurtosis er større end nul (Box, 1953 og Scheffé, 1959 p 362). Lignende forhold gælder for kvotienterne mellem den største og mindste varians (s^2_{max}/s^2_{min}) samt mellem den største varians og summen af alle ($s^2_{max}/\sum_{i=1} s^2_i$) (Box, 1953 p 331).

3.3.1 Transformation til approximativ normalfordeling

I stedet for ovennævnte test kan man benytte en metode, hvor varianserne eller spredningerne først transformeres, således at det bliver muligt at benytte de metoder, der sædvanligvis anvendes til sammenligning af gennemsnitstal. I denne sammenhæng vil logaritmetransformationen ofte være velegnet. Dette skyldes at

$$Y^{\ell}_{ij} = \ln(s^{\ell}_{ij}) \tag{3.3.1}$$

vil være en variabel hvis forventning og varians approximativt er givet ved (Scheffé 1959 p 84):

$$E(Y^{\ell}_{ij}) \approx \ln(\sigma^{\ell}_{ij}) \tag{3.3.2}$$

$$\mathrm{Var}(Y^{\ell}_{ij}) \approx \frac{1}{2(r-1)} + \frac{\gamma^{\ell}_{ij}}{4r} \tag{3.3.3}$$

hvor $i = 1,2,\ldots,k$, sortsnumre

$j = 1,2,\ldots,n$, bloknumre

r = antal registreringer pr. parcel

σ^{ℓ}_{ij} = spredning for karakter ℓ i parcellen med den i'te sort i den j'te blok

s^{ℓ}_{ij} = estimat for σ^{ℓ}_{ij} med r-1 frihedsgrader

γ^{ℓ}_{ij} = kurtosis for karakter ℓ i parcellen med den i'te sort i den j'te blok.

Hvis karakter ℓ har samme kurtosis i alle parceller, vil alle Y^{ℓ}_{ij} have samme varians. Fordelingen af Y^{ℓ}_{ij} kan forventes at være nærmere normalfordelt end $(s^{\ell}_{ij})^2$ (Scheffé 1959 p 85). Da den klassiske variansanalyse ikke er særlig følsom overfor ikke-normalitet, vil vi nu kunne sammenligne de logaritmetransformerede data ved hjælp af en sådan, idet vi benytter modellen:

$$Y_{ij} = \mu^{\ell}_{i} + \beta^{\ell}_{j} + \varepsilon^{\ell}_{ij} \tag{3.3.4}$$

hvor $\mu^{\ell}_{i} \approx \ln(\sigma_{i})$ for den i'te sort

β^{ℓ}_{j} = effekt af den j'te blok

ε^{ℓ}_{ij} = tilfældig virkning af den i'te sort i den j'te blok

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^{\ell} = 0$$

$\{\varepsilon_{ij}^{\ell}\}$ antages uafhængige og approximativt normalfordelte $N(0,(\tau^{\ell})^2)$

$$(\tau^{\ell})^2 = \frac{1}{2(r-1)} + \frac{\gamma^{\ell}}{4r}$$

γ^{ℓ} = kurtosis for karakter ℓ.

Øvrige symboler som på foregående side.

På baggrund af en sådan variansanalyse vil det være muligt at teste forskellige hypoteser om en given sorts spredning. For eksempel kan

$$H_0 : \sigma_i^{\ell} \leq \sigma_{i'}^{\ell} \quad \text{testes som} \quad H_0 : \mu_i^{\ell} \leq \mu_{i'}^{\ell} \tag{3.3.5}$$

$$H_0 : \sigma_i^{\ell} > \sigma_{i'}^{\ell} \quad \text{testes som} \quad H_0 : \mu_i^{\ell} \geq \mu_{i'}^{\ell} \tag{3.3.6}$$

$$H_0 : \sigma_i^{\ell} \leq \left(\prod_{i'=1}^{k_i} \sigma_{i'}^{\ell}\right)^{\frac{1}{k_i}} \quad \text{testes som} \quad H_0 : \mu_i^{\ell} \leq \frac{1}{k_i} \sum_{i'=1}^{k_i} \mu_{i'}^{\ell} \tag{3.3.7}$$

$$H_0 : \sigma_i^{\ell} \geq c\left(\prod_{i'=1}^{k_i} \sigma_{i'}^{\ell}\right)^{\frac{1}{k_i}} \quad \text{testes som} \quad H_0 : \mu_i^{\ell} \geq \frac{1}{k_i} \sum_{i'=1}^{k_i} \mu_{i'}^{\ell} + \ln c \tag{3.3.8}$$

hvor i betegner en nyanmeldt sort og $i'=1,2,\ldots,k_i$ betegner referencesorter.

Her er (3.3.7) og (3.3.8) måske af særlig interesse, for her testes spredningen af en given sort, i, imod en størrelse som er afhængig af spredningerne for alle de k_i sorter, den skal sammenlignes med.

Testen i (3.3.7), hvor der testes om sortens spredning er større end det geometriske gennemsnit af de øvrige sorters spredninger, vil sikkert være rimelig, hvis det er særligt vigtigt at undgå at betragte en sort for uensartet, hvis den er tilstrækkelig ensartet. Omvendt vil testen i (3.3.8) være en rimelig test, hvis det er særlig uheldigt at få uensartede sorter anerkendt. Ved denne test anerkendes en sort nemlig kun som tilstrækkelig ensartet, hvis dens spredning er signifikant mindre end en konstant, c, gange det geometriske gennemsnit af de øvrige sorters spredninger. Konstanten, c, må her vælges ud fra et kendskab til den pågældende karakter. Dette valg må nok anses for at blive ret subjektivt. En sådan konstant vil også kunne indbygges i (3.3.7).

Imidlertid vil spredningerne for de sorter, der a priori anses for tilstrækkelig ensartede, oftest variere mere end det, der kan skyldes den tilfældige variation fra parcel til parcel. I så fald vil en test som for eksempel (3.3.7) bevirke, at mange nye sorter bliver betragtet som uensartede, hvis testen udføres på baggrund af en model som (3.3.4). Såfremt standardafvigelserne - eller for eksempel logaritmerne heraf - for de sorter, der a priori anses for tilstrækkelig ensartede, kan approximeres ved en kendt fordeling, kan man benytte en test, hvor det undersøges, om den nye sort kan antages at tilhøre den samme fordeling som referencesorterne - eller en anden fordeling med en anden lokationsparameter (f.eks. middelværdi eller median).

Således vil hypotesen i (3.3.7) nu kunne skrives:

$$H_0 : \sigma_i^\ell \leq \sigma_r^\ell \qquad (3.3.9)$$

hvor σ_i^ℓ = spredning for sort i's karakter ℓ.

σ_r^ℓ = lokationsparameter for fordelingen af referencesorternes spredninger for karakter ℓ.

Hvis $Y_{i'}$, $i'=1,2,\ldots,k_i$, er en monoton funktion, for eksempel logaritmefunktionen, af referencesorternes spredninger for en bestemt karakter, og fordelingen af $Y_{i'}$ kan approximeres ved en normalfordeling, vil et muligt forkastelsesområde for hypotesen i (3.3.9) om, at den nyanmeldte sort er lige så ensartet som referencesorterne, være det hvor:

$$T > t_{1-\alpha, k_i - 1} \qquad (3.3.10)$$

Her er $T = \dfrac{Y_i - \overline{Y}'}{s\sqrt{1 + 1/k_i}}$

$$\overline{Y}' = \frac{1}{k_i} \sum_{i'=1}^{k_i} Y_{i'}$$

$s = \sum_{i'=1}^{k_i} (Y_{i'} - \overline{Y}')/(k_i - 1)$ er spredning på $Y_{i'}$

$t_{1-\alpha, k_i-1}$ = $(1-\alpha)$-fraktilen i en Student's t-fordeling med $k_i - 1$ frihedsgrader.

3.4 MULTIPLE SAMMENLIGNINGER

Da uensartethed i en enkelt karakter er tilstrækkelig til at udelukke en nyanmeldt sort, vil en testmetode som ovenfor - udført på en række karakterer - bevirke, at sandsynligheden for at en tilstrækkelig ensartet sort ikke godkendes, som sådan være større end det forudvalgte testniveau, α.

Som ved selvstændighedstesten kan man sikre sig ved at benytte en højere fraktil i t-fordelingen eller ved at kræve uensartethed for mere end en karakter, før sorten ikke kan godkendes (jvf. afsnit 2.1.1.2 samt tabel 2.1.2 og 2.1.3). Benyttes Bonferroni's ulighed, bliver forkastelsesområdet i (3.3.10) i stedet:

$$T > t_{1-\alpha/p, k_i - 1} \qquad (3.3.11)$$

hvor p = antal undersøgte karakterer. Øvrige symboler, som i (3.3.10).

I den foreslåede test sammenlignes der med et gennemsnitstal baseret på referencesorterne, hvorfor testniveauet ikke påvirkes af antal referencesorter - dog mindst to, idet det ellers ikke er muligt at beregne s i (3.3.10).

3.4.1 Samlet mål for ensartethed

Ved anvendelse af et ensartethedsmål, som omfatter alle karakterer, vil man kunne undgå proplemerne med multiple sammenligninger.

Et meget almindeligt brugt mål er variansmatricens determinant. Denne betegnes ofte den generaliserede varians (jvf. f.eks. Sneath & Sokal 1973 p 196), og har været benyttet bl. a. af Goodman (1968b) til sammenligning af variabilitet i 15 majspopulationer og i 6 populationer af tomatplanter. Den generaliserede varians for den i'te sort i den j'te blok er givet ved:

$$\zeta_{ij} = | \Sigma_{ij} | \tag{3.4.1}$$

hvor Σ_{ij} = variansmatrix for den i'te sort i den j'te blok.

Som estimat for den generaliserede varians benyttes determinanten af estimatet for variansmatricen.

Som for de enkelte karakterers varianser gælder, at logaritmerne til dette estimat - under visse forudsætninger - er varianshomogene. Specielt for normalfordelte variable gælder (appendix side A17):

$$\mathrm{Var}(Y_{ij}) = \frac{2p}{r-1} \tag{3.4.2}$$

hvor $Y_{ij} = \ln(\hat{\zeta}_{ij})$

$\hat{\zeta}_{ij} = |\hat{\Sigma}_{ij}|$

$\hat{\Sigma}_{ij}$ = estimat for variansmatricen for den i'te sort i den j'te blok.

p = antal karakterer.

Også differencen mellem variansmatricens største og mindste egenværdi har været foreslået som et mål for ensartethed (Press 1972 p 109).

Hvis karaktererne kan antages indbyrdes uafhængige - eller man ønsker at se bort fra en eventuel afhængighed - reduceres den generaliserede varians til produkt af de enkelte karakterers varianser, og vi får da et ensartethedsmål, η, givet ved:

$$\eta_{ij} = \prod_{\ell=1}^{p} (\sigma^{\ell}_{ij})^2 \qquad (3.4.3)$$

hvor σ^{ℓ}_{ij} = spredningen for karakter ℓ i den i'te sort i den j'te blok.

Dette ensartethedsmål kan eventuelt normaliseres ved potensen 1/p. Et naturligt estimat for η_{ij} er:

$$\hat{\eta}_{ij} = \prod_{\ell=1}^{p} (s^{\ell}_{ij})^2$$

hvor s^{ℓ}_{ij} = standardafvigelse for karakter ℓ i den i'te sort i den j'te blok.

Logaritmetransformeres disse estimater, får vi:

$$Y_{ij} = \ln(\hat{\eta}_{ij}) = 2 \sum_{\ell=1}^{p} \ln(s^{\ell}_{ij}) \quad , \qquad (3.4.4)$$

altså to gange summen af logaritmerne på de enkelte karakterers spredninger.

De logaritmetransformerede estimater må antages at være approximativt varianshomogene. For uafhængige karakterer gælder (appendix side A18):

$$Var(Y_{ij}) = Var(\ln \hat{\eta}_{ij}) \approx \frac{2p}{r-1} + \frac{1}{r-1} \sum_{\ell=1}^{p} \gamma^{\ell}_{ij} \qquad (3.4.5)$$

hvor γ_{ij}^{ℓ} = kurtosis for karakter ℓ for den i'te sort i den j'te blok

p = antal karakterer

r = antal registreringer pr. parcel.

I stedet for produktet af de enkelte varianser har også summen af disse været foreslået som et mål for ensartethed (Press 1972 p 109).

Såvel det sidstnævnte mål som differencen mellem variansmatricens største og mindste eigenværdi er afhængige af, hvilke enheder karaktererne registreres i. I værste fald kan en ændret registreringsenhed for en eller flere karakterer bevirke, at ensartethedsmålet for en given sort ændres fra at være den største til at være den mindste. Derfor bør disse to mål næppe benyttes, hvis de registrerede karakterer ikke er - eller er gjort - sammenlignelige.

Ved anvendelse af den generaliserede varians eller produktet af de enkelte varianser vil forholdet mellem to sorters ensartethedsmål være uafhængige af de benyttede enheder. Differencerne mellem de logaritmerede mål - Y_{ij} i (3.4.2) og (3.4.4) - vil således være uafhængige af de benyttede enheder, hvilket i forbindelse med at de logaritmetransformerede mål kan antages varianshomogene (jvf. (3.3.3) og (3.4.5)) taler for at benytte de logaritmetransformerede mål i stedet for de utransformerede mål.

Som for de univariate mål er det tænkeligt at ovennævnte mål varierer mere fra referencesort til referencesort end det, der kan skyldes tilfældig variation fra parcel til parcel. Man kan da eventuelt anvende en tilsvarende metode, som for de univariate mål (jvf. (3.3.9) og (3.3.10), og den hertil hørende tekst).

4. D A T A

Ved Statens Planteavlsforsøg udføres hvert år en række forsøg med henblik på at undersøge nyanmeldte sorter for selvstændighed og ensartethed. Kogeærter (Pisum sativum L.) er blandt de afgrøder, som har været under afprøvning i adskillige år. Siden 1969 har der været afprøvninger hvert år, dog med varierende sorter (kun 1 enkelt sort har været med alle år). De anvendte karakterer har varieret noget, men der er dog en del karakterer, som har været benyttet alle år.

Af retningslinier foreligger der fra EEC et direktiv om mindstekrav for afprøvning af foderærter (Anon 1972a) og kogeærter (Anon 1972b). Mindstekravene for foderærter benyttes dog almindeligvis også for kogeærter, idet disse da betragtes som en landbrugsart.

UPOV har ikke udarbejdet retningslinier (guidelines) for hverken koge- eller foderærter, men derimod for haveærter (Anon 1974c).

Ved afprøvningen anvendes både kvalitative og kvantitative karakterer. Registreringen af de kvalitative karakterer er imidlertid noget uregelmæssig, og da der ofte kun udføres én registrering pr. sort, er disse ikke medtaget i undersøgelsen.

Kogeærter er en alt overvejende selvbestøver.

4.1 OPRINDELSE OG OMFANG

Det anvendte datamateriale er fra sortsforsøg med kogeærter udført ved Roskilde Forsøgsstation i årene 1969-1977. Forsøgenes omfang varierer fra år til år (se tabel 4.1.1 og 4.1.2). I hvert år er der registreret på 50 enheder - 25 enheder fra hver af to parceller undtagen frømålene, hvor der er anvendt én stikprøve på 50 frø fra en blanding af frø fra begge parceller. Nogle af disse frø kan stamme fra samme plante og eventuelt også fra samme bælg.

Sorts-nr.	Sorts-navn	Frøfarve	Med i årene 69	70	71	72	73	74	75	76	77
1	Sixtus	gul	x	x	x	x	x	x	x		
2	Flavanda	gul	x	x	x	x	x	x	x	x	x
3	Paloma	gul			x	x	x	x		x	x
4	Bodil	gul			x	x	x			x	x
5	Birte	gul	x	x	x					x	x
6	Porta	gul	x	x	x					x	
7	Lotta	gul								x	x
8	Torsdag III	gul							x	x	x
9	Weitor	gul							x	x	x
10	Sv. Stivo	gul								x	x
11	Sv. U08630	gul								x	x
12	Auralia	gul		x							
13	Ceb. 64.18-67.2	gul			x						
14	Finale	grøn							x	x	x
15	Simo	grøn								x	x
16	Laga	grøn		x	x					x	*)
17	Rovar	grøn	x	x	x					x	x
18	Rondo	grøn	x	x	x				x	x	x
19	Pauli	grøn							x	x	x
20	Dick Trom	grøn							x	x	x
21	All Round	grøn	x	x	x				x	x	x
22	Maro	grøn									x

*) Laga var oprindelig også med i 1977, men er udeladt på grund af misvækst.

Tabel 4.1.1 Oversigt over sorter i forsøgene.

Karakternr.	Karakterer	69	70	71	72	73	74	75	76	77	G
		Med i årene									
1	Stængellængde		x	x	x	x	x	x	x	x	1a
2	Højde til 1. bælg	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1a
3	Antal nodier til 1. bælg	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1a
4	Antal klaser	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1a
5	Længde af internodiet før 1. blomst	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1a
6	Stilklængde på nederste blomsterstand	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1a
7	Antal blade til 2. nodie med bælge	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1a
8a	Antal bælge på 2. nodie med bælge						x	x	x	x	1a
8b	Antal bælge på 1. nodie med bælge	x	x	x	x	x					1a
9	Antal bælge ialt	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1a
10	Antal sidegrene								x	x	1a
11	Bælglængde	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1b
12	Bælgbredde på midten	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1b
13	Bælgtykkelse					x	x	x			1b
14	Antal frøanlæg pr. bælg		x	x	x	x	x	x	x	x	1b
15	Antal frø pr. bælg		x	x	x	x	x	x	x	x	1b
16	Småbladlængde		x	x	x	x	x	x	x	x	2
17	Småbladbredde		x	x	x	x	x	x	x	x	2
18	Akselbladlængde				x	x	x	x	x	x	3
19	Akselbladbredde				x	x	x	x	x	x	3
20	Fanelængde			x	x	x	x	x	x	x	4a
21	Fanebredde						x	x	x	x	4a
22	Frølængde	x	x	x	x	x	x	x	x	*)	0
23	Frøbredde	x	x	x	x	x	x	x	x	*)	0
24	Frøtykkelse	x	x	x		x	x	x			0
25	Lavbladlængde							x	x	x	5
26	Lavbladbredde							x	x	x	5
27	Bægerbladlængde									x	4b
28	Bægerbladbredde									x	4b

*) kun målt på sorterne 1, 3, 9, 10, 11 og 12.

G = karaktergrupperne: alle karakterer med samme nr. er udført i samme arbejdsgang.

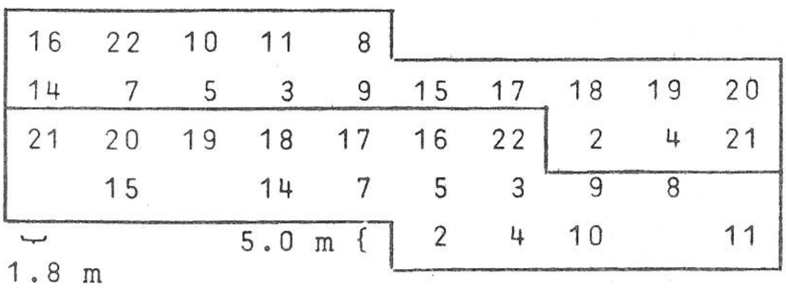
Tabel 4.1.2 Oversigt over registrerede karakterer.

Karakternr.	Karakterer	69	70	71	72	73	74	75	76	77	G
31	Bælgbredde/bælglængde	x	x	x	x	x	x	x	x	x	1b
32	Antal frø/antal frøanlæg		x	x	x	x	x	x	x	x	1b
33	Småbladbredde/småbladlængde		x	x	x	x	x	x	x	x	2
34	Akselbladbredde/akselbladlængde				x	x	x	x	x	x	3
35	Fanebredde/fanelængde						x	x	x	x	4a
36	Frøbredde/frølængde	x	x	x	x	x	x	x	x	*)	0
37	Lavbladbredde/lavbladlængde							x	x	x	5

*) kun for nogle sorter (jvf. tabel 4.1.2)

Tabel 4.1.3 Oversigt over beregnede karakterer (kvotienter).

Forsøgene har været anlagt som fuldstændige blokforsøg. I forsøgene fra 1969 til 1975 er parcellerne udlagt i en parcelrække, og sortsrækkefølgen er her den samme i begge blokke. I 1975 er forsøget delt over 2 parcelrækker med samme sortsrækkefølge i begge blokke. I 1976 og 1977 er forsøgene placeret i henholdsvis 3 og 5 parcelrækker, og parcelrækkefølgen i de to blokke er her ikke helt ens. I ingen af årene har der således været udført en egentlig randomisering. I de to sidstnævnte år findes der i forsøget en del parceller, som har været benyttet til andre formål, og derfor ikke indgår i det benyttede datamateriale. I disse to år har blokinddelingen desuden været noget uregelmæssig. Parcelfordelingen for 1977 er vist i figur 4.1.1.



Figur 4.1.1 Parcelfordeling i 1977. Tallene angiver sortsnumre, og indramningen angiver blokinddeling. I hver parcel er ærterne sået i 4 rækker.

Karakternr.	Registreringsenhed	Gennemsnit min.	Gennemsnit max.	Spredning min.	Spredning max.	Variationskoefficient min.	Variationskoefficient max.
1	cm	25.4	178.7	2.2	34.8	6	23
2	cm	21.5	93.2	1.8	25.3	4	31
3	stk.	6.1	14.3	0.6	3.7	6	32
4	stk.	2.0	8.1	0.5	4.9	14	81
5	cm x)	0.9	15.6	0.3	3.8	10	49
6	cm x)	0.6	16.9	0.2	5.8	13	75
7	stk.	3.8	6.0	0.0	1.3	0	27
8a	stk.	1.4	2.0	0.0	0.7	0	36
8b	stk.	1.0	2.0	0.0	0.5	0	36
9	stk.	3.2	15.2	0.8	9.0	19	86
10	stk.	0.0	1.2	0.0	1.2	47	500
11	mm	49.5	76.6	3.3	11.7	5	19
12	mm xx)	8.7	14.5	0.4	1.3	3	11
13	mm xx)	8.8	12.8	0.3	1.4	3	12
14	stk.	4.6	8.3	0.5	1.6	6	30
15	stk.	2.6	7.1	0.7	1.8	13	66
16	mm	30.6	67.1	2.6	10.8	6	23
17	mm	19.0	42.0	1.6	7.3	7	26
18	mm	59.4	90.7	2.9	17.3	5	21
19	mm	28.4	52.0	1.3	12.9	4	25
20	mm	14.8	24.7	0.6	2.1	3	10
21	mm	22.8	33.0	0.8	2.6	3	9
22	mm xxx)	6.1	8.6	0.0	0.8	0	11
23	mm xxx)	5.9	7.8	0.2	0.9	3	12
24	mm xxx)	5.7	7.5	0.2	0.7	3	10
25	mm	5.6	23.4	0.7	2.4	6	30
26	mm	5.6	20.5	0.7	3.1	8	35
27	mm	7.6	11.4	0.4	1.2	5	13
28	mm	3.3	5.0	0.2	0.5	4	15
31		0.16	0.22	0.01	0.05	5	23
32		0.39	0.99	0.04	0.28	4	70
33		0.51	0.75	0.02	0.10	3	18
34		0.45	0.61	0.01	0.11	3	21
35		1.30	1.73	0.04	0.12	3	9
36		0.82	0.98	0.02	0.12	3	13
37		0.70	1.51	0.06	0.26	7	27

x) I 1970 og 1971 registreret med 1 decimal.
I 1972, 1974 og 1975 registreret i halve cm.

xx) I 1973 og 1974 registreret med 1 decimal.

xxx) I 1969, 1971, 1972, 1973, 1974 og 1977 registreret med 1 decimal.

Tabel 4.1.4 Oversigt over registreringsenheder og nøjagtighed samt mindste og største værdi af gennemsnit, spredning og variationskoefficient for en parcel.

Parcelstørrelsen har i årene 1969-1974 været ca. 20-25 m^2, medens den i årene 1975-1977 har været 9-10 m^2 (ens for alle parceller i de enkelte år). I alle årene har ærterne været sået i rækker med 45 cm's afstand og ca. 3 cm mellem planterne. De 25 enheder er udvalgt, ved at der fra et givet startpunkt udtages hver 10. plante. Der er ikke udtaget planter hverken fra parcellens to yderrækker eller de yderste ender af rækkerne. Desuden er syge planter ikke udtaget.

I forsøgene har planterne ikke været nummereret. Derfor kan karakterer, som ikke er registreret i samme arbejdsgang, ikke påregnes at stamme fra de samme planter. I tabel 4.1.2 er karakterer, som er registreret i samme arbejdsgang, tildelt samme gruppenummer.

Karaktererne i grupperne 1a og 1b er alle registreret på de samme planter, men kun karakterer, som alle tilhører enten gruppe 1a eller gruppe 1b, kan henføres til en bestemt af disse. Tilsvarende gælder karaktererne i gruppe 4a og 4b.

I tabel 4.1.4 er givet en oversigt over registreringsenheder og -nøjagtighed, over største og mindste parcelgennemsnit samt største og mindste spredning henholdsvis variationskoefficient i en parcel.

4.2 UNDERSØGELSE AF FORUDSÆTNINGER

Ved analyse af data forudsættes oftest, at data følger en eller anden fordeling - ofte en normalfordeling, men også andre fordelinger som binomialfordeling, Poissonfordeling eller logaritmisk normalfordeling kan komme på tale. Desuden forudsættes, at data er repræsentative, herunder at data ikke indeholder outliers, d.v.s. stærkt afvigende eller fejlagtige observationer. Oftest forudsættes også at data er varianshomogene.

Metoderne til undersøgelse af hvor vidt forudsætningerne er opfyldt falder ret naturligt i to grupper: 1) formelle test og 2) grafiske og tabulariske metoder. Selv om de fleste formelle test er rettet mod bestemte former for afvigelser, for eksempel test for normalitet, test for varianshomogenitet og test for outliers, vil de ofte være følsomme for andre former for afvigelser fra forudsætningerne, således er Bartletts test for varianshomogenitet særdeles følsom overfor fordelinger med kurtosis forskellig fra nul (Box 1953). En ensidig anvendelse af de formelle test vil således let bevirke, at man drager forkerte konklusioner.

De statistiske analysemetoder må alle anses for at være approksimationer, hvorfor forudsætningerne kun sjældent vil være fuldstændig opfyldte. Ved anvendelse af en formel test vil man således kunne påvise små og måske betydningsløse afvigelser fra forudsætningerne i store datamaterialer, mens en formel test måske ikke kan påvise selv alvorlige afvigelser i små datamaterialer.

4.2.1 Undersøgelse for afhængighed mellem spredning og gennemsnit

Datamaterialet består som nævnt af 25 målinger fra hver af 2 parceller pr. sort og år.

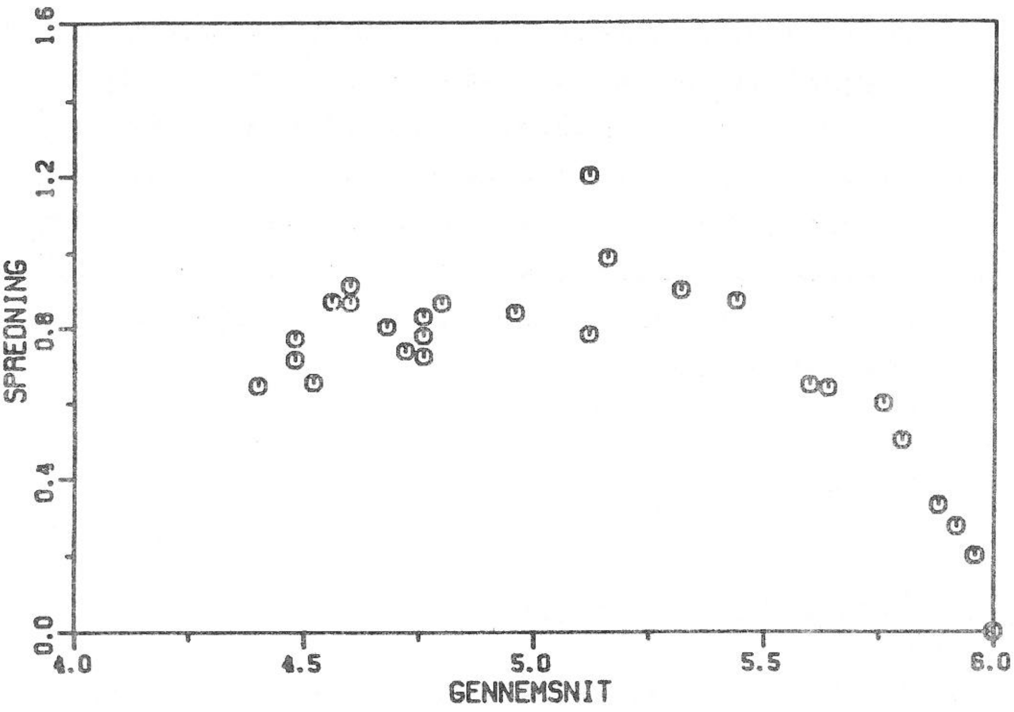
For hver parcel er det således muligt at beregne et gennemsnit samt en spredning baseret på 25 observationer. For at undersøge om spredningen inden for parceller er ens, blev spredning og middelværdi plottet mod hinanden. Dette blev udført for alle karakterer for hvert af årene 1969, 1970, 1971, 1975, 1976 og 1977. Årene 1972, 1973 og 1974 er ikke medtaget på grund af det lave antal sorter (parceller) i disse år.

Sådanne plot vil være anvendelige for bedømmelse af, om spredningen er uafhængig af middelværdien - og dermed spredningens anvendelighed som ensartethedsmål. Også variationskoefficientens anvendelighed som ensartethedsmål vil kunne bedømmes ud fra disse plot, thi hvis variationskoefficienten er uafhængig af middelværdien, vil punkterne falde omkring en ret linie, som går gennem koordinatsystemets nulpunkt. Følger data en binomial- eller en Poissionfordeling, vil punkterne falde omkring en krum linie, hvor plottene ofte vil indicere de tilfælde, hvor hverken spredningen eller variationskoefficienten er anvendelig. Desuden vil grove fejl i datamaterialet ofte være antydet i sådanne plot ved punkter, som falder uden for det generelle mønster.

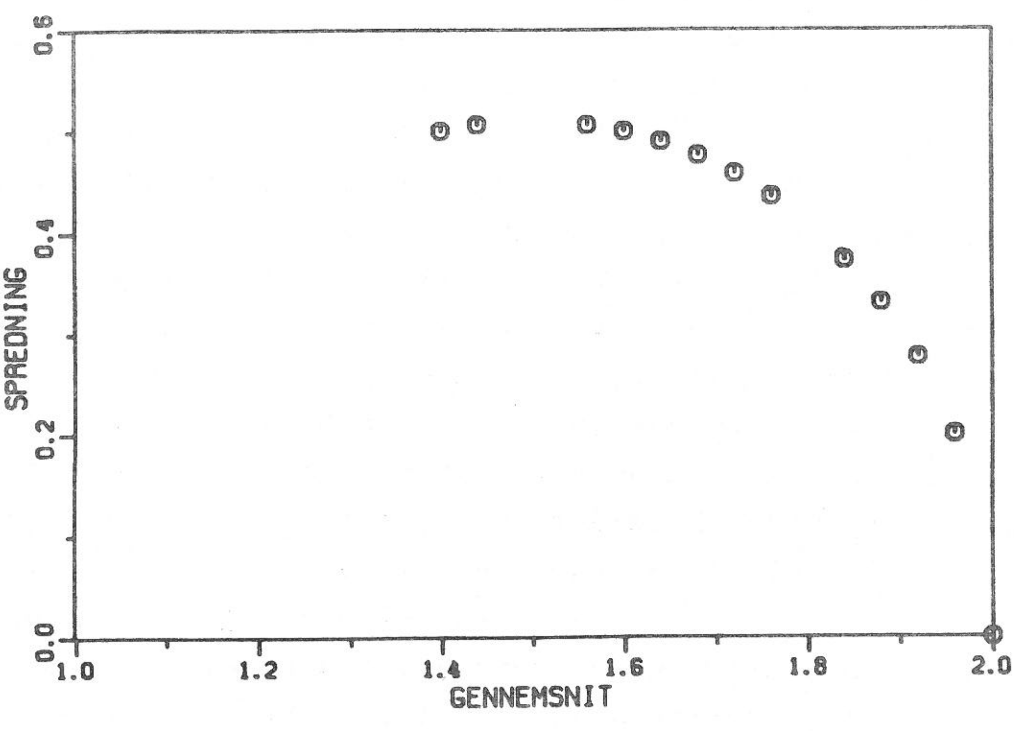
Ved gennemgangen af disse plot fandtes følgende: For karaktererne 7, 8a og 8b faldt punkterne omkring en krum linie i alle år. Tilsvarende fandtes for karakter 28 i 1977 samt i mindre udpræget grad for karakter 22, 23 og 36 i årene 1975 og 1976. For karakter 14 og 32 faldt punkterne omkring en linie med negativ hældning, idet der for karakter 32 i visse år dog var en svag nedadbøjet krumning. Punkterne for karakter 10 syntes at falde omkring en svagt krummet linie med positiv hældning i begge år. For de øvrige karakterer syntes punkterne at falde tilnærmelsesvis omkring en ret linie, hvis hældning er større end eller lig nul.

4.2.1.1 Karakterer med få værdier

Karaktererne 7, 8a og 8b er antalsvariable, som kun kan antage få værdier. Således er karakteren 7 næsten altid registreret som 4, 5 eller 6. I årene 1969 til 1977 er der således henholdsvis 98.6%, 99.1%, 96.7%, 100.0%, 99.5%, 98.7%, 99.3%, 98.3% og 99.4% af observationerne, som antager en af disse tre værdier. For karakter 8a og 8b findes tilsvarende, at henholdsvis 100.0%, 100.0%, 99.8%, 99.0%, 100.0%, 100.0%, 100.0%, 99.4% og 100.0% af observationerne i hver af de 9 år antager værdierne 1 eller 2. Værdierne er - når der ses bort fra de få "afvigende" observationer - begrænset både opad og nedad. Dette bevirker, at et gennemsnit nær en af ekstremerne (4 eller 6 for karakter 7 og 1 eller 2 for karakter 8a og 8b) kun kan fremkomme, hvis næsten alle værdier antager den pågældende ekstremværdi, og vi får derfor nødvendigvis samtidig en lille spredning. Gennemsnitsværdier midt imellem kan derimod have en større spredning, da gennemsnittet kan være fremkommet af værdier,



Figur 4.1.1 Plot af parcelspredninger mod parcelgennemsnit for karakter 7 i 1977.

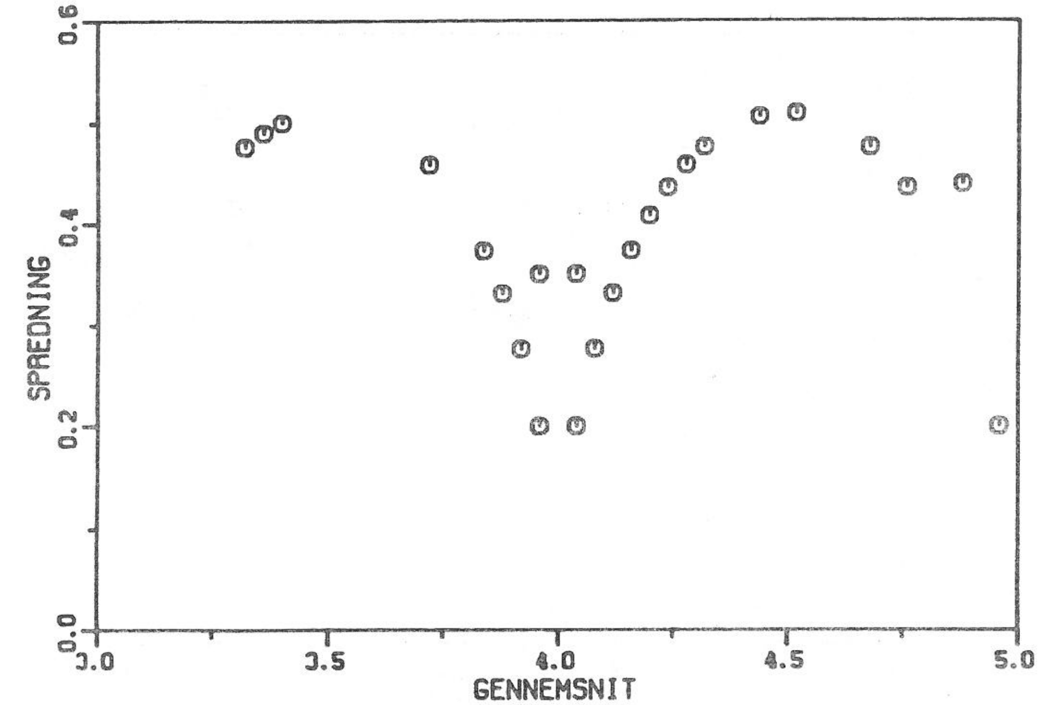


Figur 4.1.2 Plot af parcelspredninger mod parcelgennemsnit for karakter 8a i 1977.

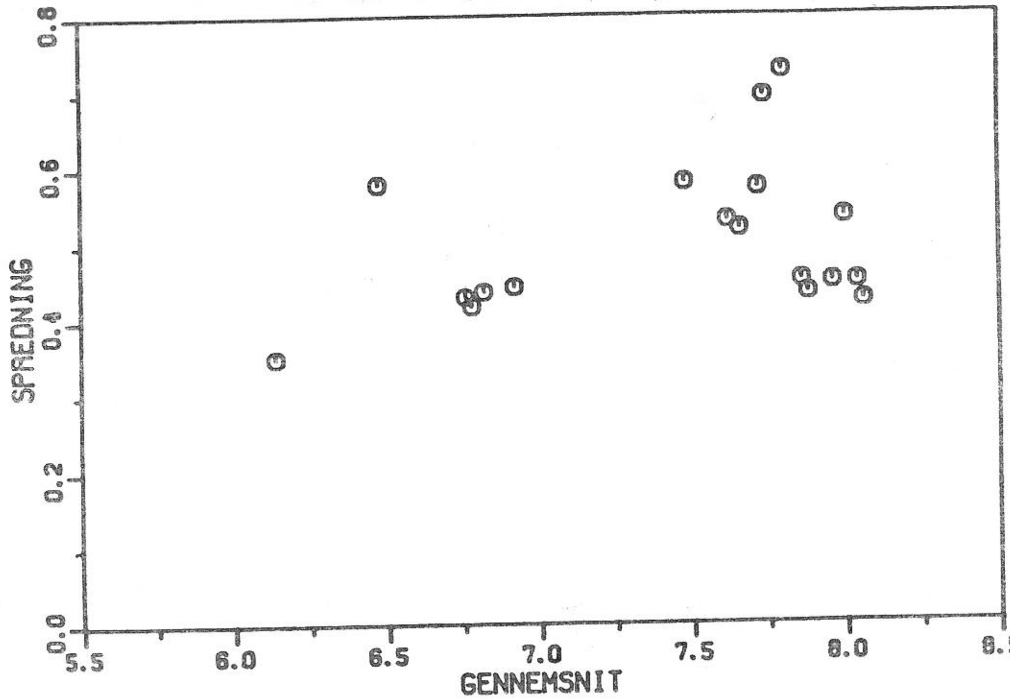
hvor den ene halvdel ligger nær den nedre grænse, og den anden halvdel ligger nær den øvre grænse (figur 4.1.1 og 4.1.2). For karakter 8a og 8b må et hvilket som helst gennemsnitstal i øvrigt bestå af blandinger af sådanne ekstremværdier, og vi får da, at spredningen er en funktion af middelværdien (figur 4.1.2). Spredningen og variationskoefficient for karakter 8a og 8b (eller transformationer heraf) vil derfor ikke være anvendelig som et ensartethedsmål.

4.2.1.2 Afrundede karakterer

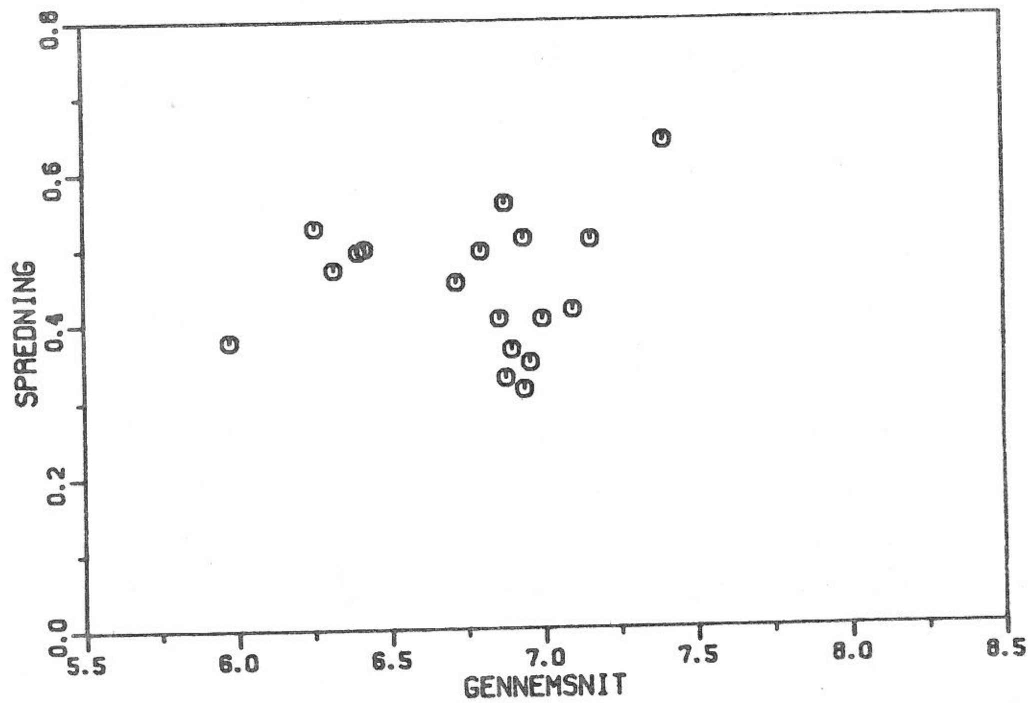
Karaktererne 22, 23, 36 og 28, hvor sammenhængen mellem gennemsnit og spredning ikke kan antages retliniet i alle år, er kontinuerte variable. Disse karakterer er i de pågældende år imidlertid baseret på registreringer målt i så grov en enhed (hele mm), at disse må betragtes som diskrete. Man må derfor forvente, at parceller med middelværdi nær et helt antal enheder vil få de fleste individer registreret som havende netop denne værdi, mens parceller med middelværdi omtrent midt imellem et helt antal enheder vil få ca. halvdelen af individerne registreret med det nærmeste neden for liggende hele antal enheder og ca. halvdelen af individerne registreret med det nærmest ovenfor liggende hele antal enheder. Dette vil bevirke, at spredningen for de registrerede karakterer må forventes at være lille for parceller med gennemsnit nær et helt antal enheder og stor for parceller med gennemsnit midt imellem et helt antal enheder. Dette er tydeligt tilfældet for karakter 28 i 1977 (figur 4.1.3), men mindre tydeligt for karakter 22 og 23 i 1975 og 1976 (figur 4.1.4 og 4.1.5). I 1970, hvor karakter 22 og 23 også er målt i hele mm, synes der ikke at være nogen afhængighed mellem spredningen og gennemsnittets afstand til et helt antal mm. Tilsvarende gælder karakter 24 i 1970 og 1975 samt karakter 27 i 1977.



Figur 4.1.3 Plot af parcelspredninger mod parcelgennemsnit for karakter 28 i 1977.



Figur 4.1.4 Plot af parcelspredninger mod parcelgennemsnit for karakter 22 i 1976.



Figur 4.1.5 Plot af parcelspredninger mod parcelgennemsnit for karakter 23 i 1976.

Når karaktererne - som her - er registreret i så grove enheder, er der risiko for, at et beregnet gennemsnit ikke er et centralt estimat for middelværdien. For en kontinuert variabel vil vi ved registrering i hele enheder og med sædvanlige afrundingsregler få registreret følgende værdier for X_h:

$$N_h = \text{ent}(X_h + 0.5) \qquad (4.2.1)$$

hvor N_h er det registrerede hele tal

ent(X) = største heltal mindre end eller lig X

X_h er den kontinuerte variabel.

Gennemsnittet af et antal afrundede værdier (N_h) vil i almindelighed være forskellig fra gennemsnittet af de tilsvarende ikke afrundede værdier (X_h). Forskellen mellem de to gennemsnitstal ($\bar{X}.$ og $\bar{N}.$) er imidlertid ikke kun en tilfældig afvigelse, men kan også være systematisk. Kender vi fordelingen af X_h, kan vi beregne den systematiske fejl. I appendix side A19 er beregning heraf vist, når $\{X_h\}$ antages normalfordelt $N(\mu,\sigma^2)$. Resultaterne er vist i tabel 4.2.1 for nogle kombinationer af spredningen på X, σ, og differencen mellem forventningen af X og det nærmeste mindre heltal. (Systematiske fejl for μ-ent(μ) lig 0.6, 0.7, 0.8 og 0.9 bliver som for μ-ent(μ) lig henholdsvis 0.4, 0.3, 0.2 og 0.1 blot med modsat fortegn).

			σ		
μ-ent(μ)	0.5	0.2	0.1	0.05	0.01
0.0	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00
0.1	-0.001	-0.08	-0.10	-0.10	-0.10
0.2	-0.002	-0.13	-0.20	-0.20	-0.20
0.3	-0.002	-0.14	-0.28	-0.30	-0.30
0.4	-0.001	-0.09	-0.24	-0.38	-0.40
0.5	0.000	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabel 4.2.1 Systematiske fejl ved registrering i hele enheder som funktion af μ-ent(μ) og σ, når den registrerede variabel antages normalfordelt $N(\mu,\sigma^2)$.

Når σ er lille sammenlignet med registreringsenheden, kan den systematiske fejl således antage betydelig størrelse. Er for eksempel $\mu = 3.3$ og $\sigma = 0.10$, vil den systematiske fejl være -0.28 svarende til ca. 8%.

Når der i en parcel er registreret mindst 3 forskellige værdier for en given karakter, er det muligt at estimere μ og σ i (4.2.1) ved maximum likelihood-metoden (Gjeddebæk 1949). Specielt for μ gælder, at estimatet er asymptotisk centralt, det vil sige uden systematisk fejl, når der benyttes store stikprøver. Imidlertid er der for de nævnte karakterer flere parceller/sorter, hvor der kun er registreret 2 forskellige værdier. For at kunne beregne et sæt maximum likelihood estimater for μ, har det således været nødvendigt at forudsætte, at karakteren har den samme spredning i alle parceller/sorter, og vi får da følgende model for en karakter, som er registreret i en grov enhed - og afrundet efter sædvanlige regler:

$$N_{ijh} = \mathrm{ent}(X_{ijh} + 0.5) = \mathrm{ent}(\mu_{ij} + \varepsilon_{ijh} + 0.5) \qquad (4.2.2)$$

hvor $i = 1,2,\ldots,k$, sortsnummer

$j = 1,2,\ldots,n$, bloknummer

$h = 1,2,\ldots,25$, registreringsnummer inden for parcel

μ_{ij} = karakterens forventning for den i'te sort i den j'te blok

$\{\varepsilon_{ijh}\}$ er $N(0,\sigma^2)$

X_{ijh} = registrering for den h'te plante i parcellen med den i'te sort i den j'te blok

N_{ijh} er X_{ijh} afrundet til nærmeste hele antal registreringsenheder.

Ovenstående model er benyttet til beregning af estimater for karakterer 27 og 28 i 1977. For frømålene, karakter 22, 23 og 24, hvor der kun er en stikprøve á 50 for hver sort, er der benyttet en tilsvarende model, blot får vi her, at det andet index, j, forsvinder, og at h antager værdierne 1,2,...,50. Opstilling af likelihood-funktionen og løsning af det fremkomne ligningssystem er beskrevet i appendix side A20-A22.

Karakteren 28 må betegnes som den af de nævnte karakterer, som er registreret i den groveste enhed, thi her antager registreringerne inden for en parcel næsten altid en af to værdier. I kun tre parceller (sort 7 og 18 i blok 2 og sort 21 i blok 1) er der registreret 3 forskellige værdier. I hver af disse tre parceller er der kun en registrering, som antager den 3. værdi.

I tabel 4.2.2 er maximum likelihood estimaterne sammenlignet med mindste kvadraters estimater. For frømålingerne (karakter 22, 23 og 24) er der kun små forskelle mellem de to former for estimater af μ_{ij} - den største relative afvigelse er 0.7%. Derimod er mindste kvadraters estimater for σ alle større - i gennemsnit ca. 18% - end maximum likelihood estimaterne for σ. Sammenlignes estimaterne derimod, efter at mindste kvadraters estimat for σ er korrigeret for den del af variabiliteten, som kan tilskrives afrundingen til hele enheder (Sheppards korrektion), kolonnen $\sqrt{\hat{\sigma}^2-1/12}$, synes estimaterne at være nogenlunde ens - afvigelserne er nu i gennemsnit mindre end 1%. Man må forvente en afvigelse på 1-2%, da maximum likelihood estimaterne ikke er korrigeret for bundne frihedsgrader.

År	Karakter	Numeriske afvigelser ml. estimater for μ_{ij}		Mindste kvadraters estimater		Maximum likelihood estimater		
							Største korrelationskoefficient, numerisk værdi	
		min	max	$\hat{\sigma}$	$\sqrt{\hat{\sigma}^2-1/12}$	σ^*	ml. middelværdier indbyrdes	ml. middelværdier og spredning
70	22	.000	.005	.593	.518	.510	.00007	.0091
	23	.002	.009	.551	.469	.463	.00037	.020
	24	.002	.010	.538	.454	.437	.00083	.032
75	22	.001	.049	.381	.248	.309	.015	.13
	23	.000	.005	.571	.493	.490	.00011	.015
	24	.003	.032	.417	.301	.350	.0069	.084
76	22	.000	.019	.511	.422	.431	.0012	.035
	23	.000	.024	.459	.357	.372	.0020	.047
77	27	.000	.004	.897	.849	.830	.00001	.0025
	28	.007	.093	.377	.243	.251	.029	.17

Tabel 4.2.2 Sammenligning af maximum likelihood estimater med mindste kvadraters estimater for karakterer registreret i en grov enhed.

For karakter 27 i 1977 gælder tilsvarende som for frømålene. I karakter 28 gælder tilsvarende for så vidt angår estimaterne for σ, derimod er forskellene mellem de to estimater af μ_{ij} her noget større - op til ca. 2.4%.

I tabel 4.2.2 er anført de numerisk største korrelationskoefficienter mellem estimaterne beregnet ved (A.19). Disse synes alle rimelige små (havde de været store, ville de beregnede estimater have været ustabile).

Hvis karakter 28 kun havde antaget to forskellige værdier i alle parcellerne, ville det ikke have været muligt at beregne et maximum likelihood estimat. Da det ikke kan udelukkes at disse tre værdier, som gør det muligt at beregne estimaterne, er afvigende observationer, må maximum likelihood estimaterne af denne grund anses for at være usikre for karakter 28.

Af de ialt 34 mindste kvadraters estimater ligger 10 estimater mellem 3.25 og 3.75 eller mellem 4.25 og 4.75, hvilket er mindre, end man skulle forvente (ved antagelse af ligefordeling af estimater mellem mindste og største estimat skulle forventes 19 estimater i ovennævnte intervaller; 16 af de 34 maximum likelihood estimater falder i ovennævnte intervaller). Selv om det er usikkert at antage en ligefordeling, når forskellen mellem største og mindste mindste kvadraters estimat kun er 1.7 enheder, må man nok regne med, at også mindste kvadraters estimaterne er dårlige.

4.2.1.3 Karakterer med ingen eller tilnærmelsesvis retliniet sammenhæng mellem spredning og gennemsnit

For de fleste karakterer/år-kombinationer syntes punkterne i plottene af spredning mod gennemsnit, som nævnt, at falde omkring en ret linie. Disse karakterer/år-kombinationer er undersøgt nærmere ved - for hver af disse - at beregne to regressioner:

$$s_{ij} = \alpha + \beta(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{...}) + \varepsilon_{ij}; \; i = 1,2,\ldots,k; \; j = 1,2 \qquad (4.2.3)$$

$$CV_{ij} = \alpha' + \beta'(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{...}) + \varepsilon'_{ij}; \; i = 1,2,\ldots,k; \; j = 1,2 \qquad (4.2.4)$$

hvor s_{ij}, CV_{ij} og $\bar{X}_{ij.}$ er henholdsvis spredning, variationskoefficient og gennemsnit for den i'te sort i den j'te blok. ε_{ij} og ε'_{ij} er tilfældige komponenter, α, α', β og β' er ukendte parametre, og k er antal sorter i forsøget. Begrundelsen for disse to regressioner er: Hvis data kan antages at følge en normalfordeling, vil hældningskoefficienten, β, i (4.2.3) være nul, da spredningen og gennemsnit i så fald er uafhængige. Tilsvarende vil hældningskoefficienten, β', i (4.2.4) være nul, hvis data kan antages at følge en logaritmisk normalfordeling. I tabel 4.2.3 er for hver af de undersøgte karakterer anført antal år med henholdsvis negative og positive estimater for β og β' i (4.2.3) og (4.2.4). Desuden er i parentes anført det antal gange, estimaterne var numerisk større end $s \cdot t_{.975,m}$, hvor s er spredningen på estimatet og $t_{.975,m}$ er .975-fraktilen i en t-fordeling med m = kn-2 frihedsgrader. Da $\{\varepsilon_{ij}\}$ og $\{\varepsilon'_{ij}\}$ næppe kan antages at være normalfordelte, skal disse antal ikke opfattes som en eksakt test for signifikans, men blot opfattes som det antal estimater, som er numerisk større end en mere eller mindre tilfældig valgt fraktil. For mange karakterer er der overvejende tendens til, at estimaterne for β i (4.2.3) er positiv. Det gælder således karaktererne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 31, 33 og 34. For disse karakterer vil det derfor næppe være acceptabelt at anvende spredningen på den målte variabel som et mål for ensartethed.

Kun for to karakterer, 14 og 32, er de negative estimater for β i overtal.

For de resterende karakterer synes der at være nogenlunde lige mange estimater med negative og positive fortegn. Disse karakterer er markeret med et "S" i tabel 4.2.3 for at antyde, at spredningen her må antages at være et acceptabelt mål for ensartethed.

Betragter vi tilsvarende estimaterne for β' i (4.2.4), finder vi, at disse overvejende er positive for karakteren 31 og overvejende negative for karakterene 5, 6, 10, 14, 15, 32 og 36.

For de fleste karakterer synes variationskoefficienten at være uafhængig af gennemsnittet. I tabel 4.2.3 er sådanne karakterer mærket med "CV".

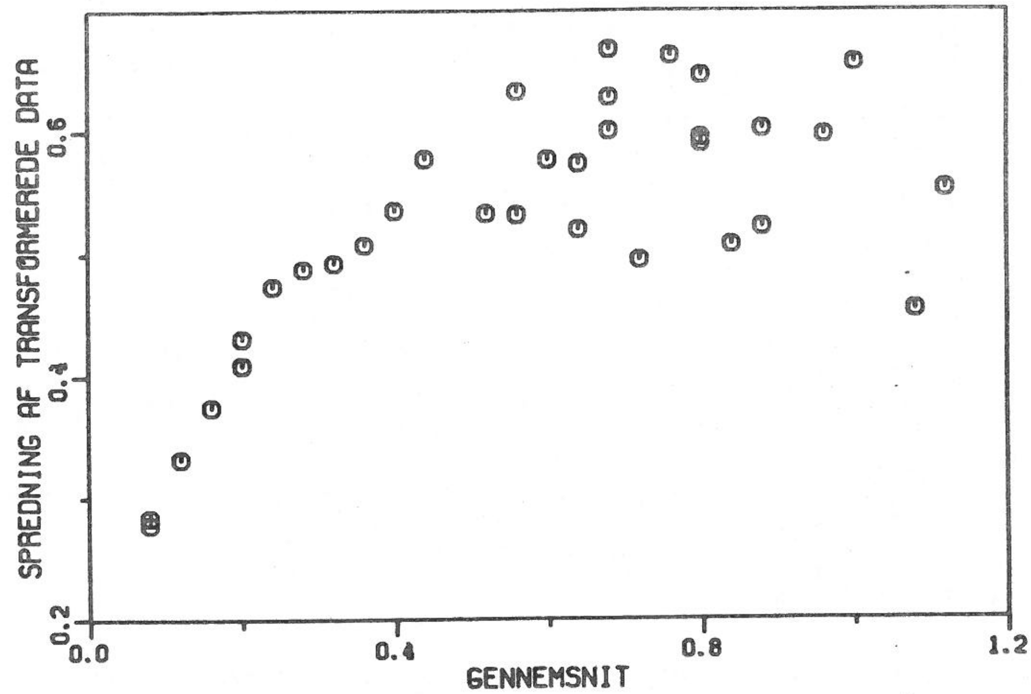
Karakter	Spredning på gennemsnit		Variationskoefficient på gn.snit		Anvendeligt ensartethedsmål
	negativ hældning	positiv hældning	negativ hældning	positiv hældning	
1	0	5(5)	1	4(1)	CV
2	1	5(5)	1(1)	5	CV
3	0	6(6)	3	3	CV
4	0	6(5)	2	4	CV
5	0	6(6)	5(4)	1	
6	0	6(6)	5(5)	1	
9	0	6(6)	3(1)	3	CV
10	0	2(2)	2(2)	0	
11	2	4(2)	4	2(1)	CV
12	1	5(3)	3	3	CV
14	4(1)	1	5(4)	0	
15	1	4	5(2)	0	S
16	0	5(1)	3	2	CV
17	0	5(3)	2	3	CV
18	0	3(2)	1	2	CV
19	0	3(2)	0	3(1)	CV
20	0	4(2)	2	2	CV
21	0	3	2	1	S CV
22	1	3(1)	3	1	S CV *)
23	0	4(1)	0	4	CV *)
24	2	2(1)	2(1)	2(1)	S CV
25	0	3(1)	1	2	S CV
26	0	3(1)	3(1)	0	S CV
27	0	1(1)	0	1	S CV
31	0	6(3)	0	6(2)	
32	5(4)	0	5(5)	0	
33	0	5(2)	3	2(2)	
34	1	2(2)	1	2	CV
35	1	1	2	1	S CV
36	2	2	4(1)	0	S *)
37	0	3(1)	3(1)	0	S CV

*) ikke retliniet sammenhæng i 2 år.

Tabel 4.2.3 Oversigt over antal år med negative og positive fortegn for estimater af hældningskoefficienten ved regression af spredning på gennemsnit samt af variationskoefficient på gennemsnit. I parentes er anført det antal gange, estimaterne var numerisk større end 97.5%-fraktilen i Students t gange estimatets spredning.

For de fleste af de i tabel 4.2.3 nævnte karakterer synes det således muligt at anvende enten spredningen eller variationskoefficienten som mål for ensartethed. For nogle karakterer synes begge mulige.

For karaktererne 5, 6 og 10 er estimaterne for β alle positive samtidig med at estimaterne for β' oftest er negative. Dette kunne tyde på, at en logaritmetransformation er for kraftig til at stabilisere spredningen. Det er derfor undersøgt, om en kvadratrodstranformation vil stabilisere spredningen. For karakter 10, der er antalsvariabel, synes spredningen på de transformerede tal at være uafhængig af gennemsnittet, når dette er større end ca. 0.4 (figur 4.1.6), men stærkt afhængig af gennemsnittet, når dette er mindre end ca. 0.4, hvorfor transformationen ikke er anvendelig.



Figur 4.1.6 Plot af parcelspredninger på kvadratrodstransformerede data mod parcelgennemsnit af registrerede data for karakter 10.

Karaktererne 5 og 6 er i 1969, 1976 og 1977 målt i hele cm. For disse år synes kvadratrodstransformationen at stabilisere spredningen, mens variationskoefficienten synes at være lige så god eller bedre for årene 1970, 1971 og 1975, hvor registreringsnøjagtigheden har været større. I tabel 4.2.4 er $\hat{\beta}''/\hat{\alpha}''$ og $\hat{\beta}'/\hat{\alpha}'$ anført. $\hat{\alpha}'$ og $\hat{\beta}'$ er estimative for α' og β' i (4.2.4) og $\hat{\alpha}''$ og $\hat{\beta}''$ er tilsvarende estimater for α'' og β'' i

$$s_{Y_{ij}} = \alpha'' + \beta''(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{...}) + \varepsilon_{ij} ,$$

hvor $s_{Y_{ij}}$ er spredningen på $Y_{ijh} = \sqrt{X_{ijh}}$ for den i'te sort i den j'te blok. Ved at anføre kvotienterne $\hat{\beta}''/\hat{\alpha}''$ og $\hat{\beta}'/\hat{\alpha}'$ i stedet for $\hat{\beta}''$ og $\hat{\beta}'$ opnår vi, at de anførte tal bliver uafhængige af niveauet for ensartethedsmål, og at de kan fortolkes som den relative ændring i ensartethedsmålet ved en ændring på en enhed i de oprindeligt registrerede data.

		Mål for afhængighed (se tekst)			
		s i kvadratrodstransformation		variationskoefficient	
År	Karakter:	5	6	5	6
69		-.005	-.013	-.054	-.120
70		.065	.465	-.061	.042
71		.106	-.005	.020	-.077
75		.069	.048	-.013	-.055
76		-.025	-.018	-,092	-.088
77		-.012	.013	-.075	-.069

Tabel 4.2.4 Afhængigheden mellem spredningen på kvadratfodstransformerede tal og gennemsnit samt mellem variationskoefficient og gennemsnit.

For karakteren 31 er estimaterne for såvel β i (4.2.3) og β' i (4.2.4) alle positive. Dette tyder på, at en logaritmetransformation ikke er kraftig nok til at stabilisere spredningen. Da karakteren er en kvotient, vil det være naturligt at undersøge, om den reciprokke værdi (som er kraftigere end en logaritmetransformation) vil stabilisere spredningen. Karakter 33, som også er en kvotient, har store positive værdier for β' i 1976 og 1977, hvorfor det også er undersøgt, om den reciprokke værdi for denne karakter har en stabil spredning.

Resultaterne er anført i tabel 4.2.5 som $\hat{\beta}'''/\hat{\alpha}'''$. Her er $\hat{\alpha}'''$ og $\hat{\beta}'''$ estimater for α''' og β''' i:

$$s_{Y_{ij}} = \alpha''' + \beta'''(\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{...}) + \varepsilon_{ij} ,$$

hvor $s_{Y_{ij}}$ er spredningen på $Y_{ijh} = 1/X_{ijh}$ for den i'te sort i den j'te blok. Til sammenligning er anført $\hat{\beta}'/\hat{\alpha}'$.

		Mål for afhængighed (se tekst)			
		s i reciprok-transformerede tal		variationskoefficient	
År	Karakter	31	33	31	33
69		-1.2	-	5.6	-
70		-5.0	-1.15	0.1	-0.26
71		6.4	-2.39	15.2	-0.20
75		-4.3	-2.00	1.3	-0.37
76		4.7	1.70	11.9	3.12
77		2.2	2.03	7.0	3.5

Tabel 4.2.5 Afhængigheden mellem spredningen på $Y = X^{-1}$ og gennemsnit samt mellem variationskoefficient og gennemsnit.

For karakter 31 er der 3 positive og 3 negative estimater for β''', og den numerisk største $\hat{\beta}'''/\hat{\alpha}'''$ er væsentlig mindre end den numerisk større $\hat{\beta}'/\hat{\alpha}'$, hvorfor den reciprokke værdi må anses for at have en mere stabil spredning end karakteren selv. Betragter vi karakter 33, ser vi at variationskoefficienten på karakteren må antages at være uafhængig af gennemsnittet i årene 1970, 1971 og 1975, hvorimod spredningen på den reciprokke værdi bedre kan antages uafhængig af gennemsnittet i 1976 og 1977 end variationskoefficienten på karakteren.

Karakter 14 og 32 er de eneste karakterer, hvor de negative estimater for β er i overtal. For disse to karakterer vil variationskoefficienten være dårligere end spredningen.

For karakteren 32 kan de negative estimater begrundes med en binomialfordeling. Antager vi, at antal frø pr. bælg X^{15}_{ijh} er binomial $Bi(X^{14}_{ijh}, p_{ij})$, hvor X^{14}_{ijh} er antal frøanlæg pr. bælg og p_{ij} er sandsynligheden for at et frøanlæg udvikler sig til et frø, vil karakter 32, $X^{32}_{ijh} = X^{15}_{ijh}/X^{14}_{ijh}$, h = 1,2,...,25 være en række estimater for p_{ij}. (Det antages, at p_{ij} er ens for alle frøanlæg i en bælg og for alle bælge i en parcel). Da antal frøanlæg pr. bælg er relativt konstante for alle parceller, vil variansen på X^{32}_{ijh} approximativt være givet ved $Var(X^{32}_{ijh}) \approx p_{ij}(1-p_{ij})/\bar{X}^{14}_{...}$. Denne antager sin største værdi for p_{ij} lig 0.5 og vil være 0 for p_{ij} lig 0 eller 1. Da gennemsnittet for karakter 32 i næsten alle de undersøgte parceller er større end 0.5, får vi at variansen og dermed spredningen for karakteren vil blive mindre jo større middelværdien er. Med de nævnte antagelser må man derfor forvente, at variansen på Y_{ijh} = Arsin $(\sqrt{X^{32}_{ijh}})$ vil være approximativt konstant (jvf. afsnit 3.1). Med undtagelse af 1975 og 1976, hvor de største parcelgennemsnit for karakter 32 er større end 0.95, synes spredningen på Y_{ijh} i overensstemmelse hermed at være nogenlunde konstant. I disse to år er sammenhængen mellem spredningen på de Arcsin-transformerede tal og gennemsnittet ikke-lineær - og spredningen på de Arcsin-transformerede tal derfor ikke et anvendeligt ensartethedsmål. I de øvrige tre år (70, 71 og 77), hvor de Arcsin-transformerede tal har nogenlunde konstant spredning, er afhængigheden mellem spredningen på de utransformerede tal og gennemsnittene dog heller ikke særlig udpræget (se tabel 4.2.6).

Spredningen på de to karakterer med negative estimater for β kan muligvis stabiliseres gennem en transformation, $Y = f(X)$, hvor det må gælde, at $f'(x)$ er en voksende funktion i x. En sådan transformation kan da være $Y = X^a$, hvor a er en konstant større end 1. I tabel 4.2.6 er $\hat{\beta}''''/\hat{\alpha}''''$ og $\hat{\beta}/\hat{\alpha}$, hvor $\hat{\alpha}$ og $\hat{\beta}$ er estimater for α og β i (4.2.3) og $\hat{\alpha}''''$ og $\hat{\beta}''''$ er estimater for α'''' og β'''' i:

$$s_{Y_{ij}} = \alpha'''' + \beta''''(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{...}) + \varepsilon''''_{ij}$$

hvor $s_{Y_{ij}}$ er spredningen på $Y_{ijh} = X^2_{ijh}$ for sort i i blok j.

For karakter 14 synes spredningen på det kvadrerede tal kun at være mere stabil end spredningen på de registrerede tal for et enkelt år, 1977 det år, hvor spredningen på X er mest afhængig af gennemsnittet. Ingen af de to mål for ensartethed synes gode i alle år, thi med en relativ ændring i ensartethedsmålet på -0.16 i 1977 kan den forskel i ensartethedsmålet, som er betinget af gennemsnittet, være op til ca. 24% (da forskellen mellem største og mindste gennemsnit i 1977 er ca. 1.5). For 1976 fås tilsvarende at for spredningen på de kvadrerede tal kan den af gennemsnittet betingede forskel i ensartethedsmålet være op til ca. 32%.

		Mål for afhængighed (se tekst)			
		s på $Y = X^2$		s på X	
År	Karakter	14	32	14	32
69		-	-	-	-
70		.057	-.21	-.056	-1.02
71		.133	.00	.003	- .61
75		.143	-3.39	-.010	-4.43
76		.160	-3.83	-.018	-4.67
77		-.002	.11	-.16	- .96

Tabel 4.2.6 Afhængigheden mellem spredningen på $Y = X^2$ og gennemsnit samt mellem spredning og gennemsnit på de registrerede tal for karakter 14 og 32.

For karakter 32 synes kvadreringen at være anvendelig i 1970, 1971 og 1977, hvorimod spredningen på de kvadrerede tal ikke synes at være et godt ensartethedsmål i 1975 og 1976. Altså tilsvarende som for Arcsin-transformationen. Forskellen mellem største og mindste gennemsnit er i hver af de to år ca. 0.2, og vi får da, at den forskel i ensartethedsmål, som er betinget af gennemsnittet, kan være op til 60-70%. Lidt bedre bliver det hvis man vælger en højere potens ved transformationen, men i så fald får man en ikke-lineær sammenhæng mellem spredning og gennemsnit.

4.2.2 Undersøgelse af parcelresidualernes fordeling

Ved undersøgelse af fordeling i datamaterialer, hvor der kun er en observation for hver forventningsværdi, kan man ofte anvende residualestimaterne på samme måde som observationerne i en ustruktureret population. Imidlertid må man være opmærksom på, at residualestimaterne er pålagt visse restriktioner - undertiden så stærke restriktioner, at selv grafiske metoder kan påvirkes mærkbart heraf (Anscomb & Tukey 1963).

Et første trin i fordelingsundersøgelsen vil ofte være at tegne et histogram over residualestimaterne eller en empirisk fordelingsfunktion (kumulativ frekvensdiagram) evt. transformeret. Da den foreslåede test for selvstændighed - og de hidtil anvendte test - har normalfordelingen som forudsætning, er der her benyttet en transformation, $F^{-1}(c_e)$ af den empiriske fordelingsfunktion, hvor $F^{-1}(c_e)$ er den inverse af fordelingsfunktionen for en normalfordeling med middelværdi 0 og varians 1, $c_e = (a_i - 1/3)/(k + 1/3)$ er den empiriske fordelingsfunktion, a_i er det pågældende residualestimats ranknummer og k er antal residualestimater. Afsættes $F^{-1}(c_e)$ mod residualestimaterne, vil punkterne fordele sig omkring en ret linie, hvis residualestimaterne er normalfordelte (den såkaldte probitanalyse). Ikke normalitet vil vise sig ved afvigelser fra en ret linie, men også andre former for afvigelser fra forudsætningerne - for eksempel afvigende observationer - kan bevirke, at punkterne ikke falder omkring en ret linie.

Ved vurdering af sådanne probitanalyser bør man være opmærksom på antallet af observationer, idet dette har betydning for, hvor store afvigelser fra den rette linie der med rimelighed kan tolereres (Daniel & Wood 1971 figur 3A.1-3A.14).

I det foreliggende datamateriale er der kun to blokke. Benytter vi modellen (1.2.1), bevirker dette, at korrelationskoefficienten mellem de to residualestimater for en given sort er -1. Korrelationskoefficienten mellem residualestimater fra samme blok er af mindre betydning i de år, hvor antal sorter er rimelig stor. Den er identisk med korrelationskoefficienten mellem afvigelser fra gennemsnittet i en stikprøve med samme antal observationer som i en blok og er givet ved -1/(k-1), hvor k er antal sorter.

De ovenfor nævnte plot er derfor baseret på residualestimaterne fra kun en blok (blok 1) og er kun udført for årene 1969, 1970, 1971, 1975, 1976 og 1977 (i 1972, 1973 og 1974 var der kun få sorter i forsøget).

Da der kun er to blokke, vil residualestimaterne - bortset fra en konstant - kunne udtrykkes ved differensen mellem de to observationer for samme sort. Vi har:

$$\hat{\varepsilon}_{i1} = \tfrac{1}{2}(X_{i1}-X_{i2}) - \hat{\beta}_1. \qquad (4.2.5)$$

Hvis X_{ij} er normalfordelt vil også $\hat{\varepsilon}_{ij}$ være normalfordelt. Derimod er det ikke givet, at X_{ij} er normalfordelt, hvis $\hat{\varepsilon}_{ij}$ er det, for lineære kombinationer af stokastiske variable vil i almindelighed tendere at følge en normalfordeling bedre end de enkelte stokastiske variable (Seal 1964 p 139). Specielt vil fordelingen af $\hat{\varepsilon}_{i1}$ være symmetrisk, blot $X_{ij}(\varepsilon_{ij})$ er ensfordelte - altså uden at $X_{ij}(\varepsilon_{ij})$ nødvendigvis er symmetrisk fordelte. Probitanalyserne er udført dels på grundlag af de registrerede data og dels efter, at data er blevet logaritmetransformeret.

En visuel bedømmelse af probitanalyserne gav anledning til at undersøge visse karakter/år-kombinationer nærmere. I alt blev 78 ud af 312 karakter/år-kombinationer undersøgt nærmere.

4.2.2.1 Afvigende observationer

I de fleste af de undersøgte karakter/år-kombinationer, 59, syntes afvigelserne at kunne skyldes afvigende observationer. Bliss (1967) beskriver to metoder til at teste for en enkelt afvigende observation. Disse to metoder overestimerer henholdsvis underestimerer sandsynligheden for, at afvigelsen kan skyldes en tilfældighed. Ved den ene metode betragtes den reduktion, der vil ske i residualkvadratsummen, hvis den pågældende observation udelades af analysen (= erstattet af et estimat for missing plot). Denne reduktion i residualkvadratsummen, Q_1, testes så mod den reducerede residualvarians, V_1, idet der tages hensyn til, at den mest afvigende observation kunne være fremkommet i en hvilken som helst af de k sorter. (Da der kun er to blokke, bliver testen for, om en tilfældig valgt observation er afvigende, identisk med testen for om differencen mellem de to observationer fra en tilfældig valgt sort er afvigende, og vi kan derfor nøjes med at multiplicere med k i stedet for n k). Den beregnede sandsynlighed, for at afvigelsen kan skyldes en tilfældighed, er da:

$$P_1 \approx k \cdot P(F > Q_1/V_1) \qquad (4.2.6)$$

hvor F er F-fordelt (1,m-1)

$m = (k-1)(n-1)$

$Q_1 = 2\,kx^2/(k-1)$

x er det afvigende residualestimat i en af blokkene.

Denne metode overestimerer sandsynligheden, men simuleringsundersøgelser tyder på, at den eksakte sandsynlighed for mange planer og små sandsynligheder vil ligge meget nær denne øvre grænse (John & Prescott, 1975), og denne metode er derfor benyttet her. I flere tilfælde tyder probitanalyserne på, at der er to afvigende observationer. Principperne i den ovenfor beskrevne test kan anvendes ved en simultan test for to afvigende observationer, idet reduktionen i residualkvadratsummen, Q_2, ved at erstatte begge observationer med estimater for missing plot, ligeledes kan testes med en reduceret residualvarians, V_2. Også her må vi tage hensyn til det antal måder, hvorpå to sorter kan udtages blandt antallet af sorter i forsøget. Dette antal er k(k-1)/2. Reduktionen i residualkvadratsummen kan, da der kun er to blokke, beregnes således:

$$Q_2 = 2[x^2 + y^2 + (x+y)^2/(k-2)]$$

hvor x og y er de to afvigende residualestimater i en af blokkene. Vi får da, at sandsynligheden for at afvigelserne kan skyldes en tilfældighed er approximativt:

$$P_2 \approx \frac{k(k-1)}{2} P(F > F_0) \qquad (4.2.7)$$

hvor $F_0 = \frac{Q_2}{2V_2}$

F er F-fordelt (2,m-2).

En anden approximation for beregning af P_2 - som også kan anvendes, når antal blokke er forskellig fra 2 - er givet af John & Draper (1978):

$$P_2 \approx \tfrac{1}{2}c(c-1)P(F_2 > F_0)-c(c-2)P(F_1 > 2\,\frac{m-1}{m-2}\,F_0) \qquad (4.2.8)$$

hvor $c = \frac{3}{4}k\cdot n(1-(a+1)kn/1600)$

$a = 2$, antal afvigende observationer

$m = (k-1)(n-1)$

F_1 er F-fordelt (1,m-1)

F_2 er F-fordelt (2,m-2)

$F_0 = \frac{Q_2}{2V_2}$.

For en række eksempler gav (4.2.7) værdier, som var lidt mindre end de tilsvarende ved anvendelse af (4.2.8) - på grund af det simplere udtryk, og fordi (4.2.8) næppe fuldt udnytter den identitet, der er mellem testen for en afvigende observation og testen for, om differencen mellem de to observationer er afvigende, er (4.2.7) anvendt her. Da en lille værdi for P_2 enten kan skyldes, at begge residualestimater eller at kun det numerisk største residualestimat stammer fra afvigende observationer, er det undersøgt, om det ene af disse (det numerisk mindste) kan antages at være en tilfældig afvigelse - givet at det numerisk største stammer fra en afvigende observation. Dette er undersøgt på lignende måde som ovenfor ved at beregne reduktionen i residualkvadratsummen, Q_1^*, ved at erstatte den mindst afvigende observation med estimatet for missing plot, når observationen svarende til det numerisk største residualestimat allerede er erstattet med estimatet for missing plot. Denne reduktion kan testes mod den tidligere omtalte reducerede residualvarians, V_2, idet der her må tages hensyn til, at den næstmest afvigende sort kunne være kommet i en hvilken som helst af de resterende k-1 sorter. Vi får:

$$P_1^* \approx (k-1)P(F > Q_1^*/V_2) \qquad (4.2.9)$$

hvor
$$Q_1^* = Q_2 - 2kx^2/(k-1),$$

hvor x er det numerisk største af de 2 residualestimater og P_1^* er sandsynligheden for, at det numerisk næststørste residualestimat kan være så stort ved en tilfældighed.

Karakter	År	Originaldata	Logaritmetransformerede data
1	71	1	
1	76	10, 9	10
1	77	11, 7	
2	76	10	10
3	70	21	21
5	71		21
6	70	1	
6	71	21	21
7	75	20	20
8b	70	1, 17	1, 17
9	71		21
13	75	9	9
18	75	2, 18	
18	77	9	9
19	77		9
21	75	14	14
25	76	18, 9	18, 9
25	77	8	8
26	77	8	8
31	77	22	22
32	75	8	8
32	76	3	3
35	75	14	14

Tabel 4.2.7 Sortsnumre for hvilke residualestimaterne er så store, at de må betegnes som værende afvigende ($P < 0.05$).

I tabel 4.2.7 er samlet resultater af test for afvigende observationer. Kun karakter/år-kombinationer, som er bedømt afvigende i mindst en af modellerne (originaldata og logaritmetransformerede data) er anført. Flere observationer viser sig at være afvigende i begge modeller, mens andre observationer kun synes at være afvigende i den ene af modellerne. Dette kan skyldes, at observationen kun viser sig som afvigende, når der anvendes en forkert model, men det kan også skyldes, at afvigelsen ikke er stor nok til at "slå igennem" i en model, som passer dårligt til data.

For både originaldata og logaritmetransformerede data er antallet af karakter/år-kombinationer med mindst en afvigende sort (henholdsvis 20 og 19, se tabel 4.2.7) noget større end det forventede antal på 7.8, og man må derfor nok regne med, at i hvert fald nogle af de anførte sorter er registreret med afvigende observationer.

4.2.2.2 Normalitet

En del af probitanalyserne tydede på systematiske afvigelser fra en normalfordeling. Hvorvidt disse afvigelser kan skyldes en tilfældighed eller ej er undersøgt ved Kolmogorov-Smirnovs test. Da der kun er to blokke og residualestimaterne derfor - bortset fra en niveaukonstant - kan udtrykkes ved differensen mellem de to observationer med samme sort (4.2.5), kan testvariablen $D = \max_{i=1,2,\ldots,k} |a_i/k - \Phi(\hat{\varepsilon}_{i1}/s_{\hat{\varepsilon}})|$ sammenlignes med de kritiske værdier i Lilliefors tabel (Lilliefors 1967). Her er a_i ranknummer for $\hat{\varepsilon}_{i1}$ og

$$s_{\hat{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{k-1}\,\Sigma\,\hat{\varepsilon}_{i1}^2}$$

De karakter/år-kombinationer, hvor hypotesen om normalitet blev forkastet på 5% niveauet, er anført i tabel 4.2.8.

Antallet af karakter/år-kombinationer med "x" i tabellen er ikke stort, når det tages i betragtning, at der er undersøgt ialt 2*156 probitanalyser. (Det skal dog bemærkes, at en systematisk beregning af Kolmogorov-Smirnovs test ville give betydelig flere signifikante udslag, men mange af disse synes at kunne forklares ved afvigende observationer, og er derfor ikke anført i tabel 4.2.8 - men i tabel 4.2.7).

	Originaldata						Logaritmetransformerede data					
	år						år					
Karakter	69	70	71	75	76	77	69	70	71	75	76	77
1			x		x							
2				x								
3					x							
5				x						x		x
6			x		x				x			
19					x						x	
31						x						
33			x						x			

Tabel 4.2.8 Karakter/år-kombinationer for hvilke henholdsvis originaldata og logaritmerne heraf ikke kan antages at følge en normalfordeling ($P < 0.05$).

4.2.2.3 Varianshomogenitet

For at undersøge om residualerne var varianshomogene, blev residualestimaterne plottet mod de værdier, som skulle forventes ud fra modellen. I 4 tilfælde tydede disse plot på, at der var nogle residualer med en stor varians og andre med en lille varians. For at teste, om de to sæt af residualer kan have samme varians, er variansen på de to sæt af residualestimater sammenlignet ved en F-test. Da de to sæt af residualestimater kan fremkomme på flere måder, er sandsynligheden for, at afvigelserne kan skyldes en tilfældighed beregnet ved

$$P = 2\binom{k}{n_1} P\,(F > F_0) \qquad (4.2.10)$$

hvor n_1 og n_2 antal residualestimater i hver af de to sæt, $n_1 + n_2 = k$, F_0 = kvotienten mellem varianserne på de to sæts residualestimater, F er F-fordelt (n_1-1, n_2-1). Kun en af disse tests (karakter 6 i 1976) gav en P-værdi mindre end 5%.

I andre tilfælde tydede plottene på, at variansen er en funktion af middelværdierne. Hvis variansen er en monoton funktion af middelværdierne, vil også de kvadrerede residualestimater være en monoton funktion af middelværdierne. Antages det, at funktionen kan approximeres ved en ret linie, kan man teste, om der er en sammenhæng ved en regression af de kvadrerede residualestimater på de forventede værdier (Anscombe & Tukey, 1963), hvor regressionskoefficienten er givet ved:

$$\tilde{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \hat{\varepsilon}_{ij}^2 (\hat{X}_{ij} - \bar{X}_{..})}{\hat{\sigma}^2 \cdot H}$$

med variansen:

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \frac{2(k-1)}{(k+1)H}$$

hvor $\hat{\varepsilon}_{ij}$, $\hat{X}_{ij}$ og $\hat{\sigma}^2$ er estimater i modellen

$$X_{ij} = \mu_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \text{ (jvf. (1.2.1))}$$

$$H = \frac{k-2}{2 \cdot k} \, SAK_{sorter}$$ (da der kun er 2 blokke).

En approximativ test for $H_0 : \beta = 0$ kan udføres ved at sammenligne $U = \tilde{\beta}/\sqrt{\mathrm{Var}(\tilde{\beta})}$ med fraktilen i en standardiseret normalfordeling (Anscombe & Tukey 1963).

I tabel 4.2.9 er med x markeret de karakter/år-kombinationer, hvor U er større end 2.00. Der er kun blevet undersøgt karakter/år-kombinationer, hvor plottene tydede på, at variansen er en funktion af middelværdien. Ialt undersøgtes 16 og 5 karakter/år-kombinationer for henholdsvis originaldata og logaritmetransformerede data.

Karakter	Originaldata						Logaritmetransformerede data					
	År						År					
	69	70	71	75	76	77	69	70	71	75	76	77
1						x						
6		x			x							
11	x						x					
21				x								

Tabel 4.2.9 Karakter/år-kombinationer, hvor variansen må antages at være en funktion af middelværdien.

I hverken tabel 4.2.8 eller 4.2.9 er antallet af krydser overvældende stort sammenlignet med antal karakter/år-kombinationer. Dette - i forbindelse med, at der i begge tabeller er flest krydser i venstre halvdel - kunne tyde på, at forudsætningerne for variansanalyser vil være til stede ved anvendelse af logaritmetransformerede data.

4.2.2.4 Multivariate fordelinger

I det foregående er alene undersøgt en karakter ad gangen. Ved anvendelse af den foreslåede test forudsættes imidlertid en flerdimensional normalfordeling. I flerdimensionale data er mulighederne for afvigelser fra normalitet mangeartet, og det vil derfor næppe være muligt at finde en test eller grafisk metode, som kan tage højde for alle disse.

Man kan vise, at X er fordelt som en flerdimensional normalfordeling $N(\mu,\Sigma)$, hvis og kun hvis $C'X$ er fordelt som en eendimensional normalfordeling $N(C'\mu,C'\Sigma C)$ for alle vektorer $C \neq 0$ (Malkovich & Afifi, 1973 (ikke original)). Marginal normalitet er således en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for flerdimensional normalitet. Imidlertid vil mange former for afvigelser fra flerdimensional normalitet ofte give afvigelser fra normalitet i de marginale fordelinger (Gnanadesikan, 1977).

Af denne årsag og fordi en grundigere undersøgelse er meget beregningskrævende, og vanskeliggøres af det lille antal frihedsgrader til estimation af residualvariansen, er der her kun undersøgt de marginale fordelinger.

4.2.3 Effekten af at benytte en forkert forsøgsenhed

Ved opgørelse af sortsforsøgene undlader man undertiden at tage hensyn til, at de registrerede planter (frø, bælge, blade m.m.) har været samlet i et mindre antal parceller.

Antager vi, at den korrekte model for en variabel er:

$$X_{ijh} = \mu_i + \beta_j + e_{ij} + f_{ijh} \tag{4.2.11}$$

men at variablen analyseres ved modellen:

$$X_{ijh} = \mu_i + \varepsilon_{ijh} \tag{4.2.12}$$

hvor $i = 1,2,\ldots,k$, sortsnummer

$j = 1,2,\ldots,n$, bloknummer

$h = 1,2,\ldots,r$, registrering inden for parcel

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 = (n-1)\sigma_\beta^2$$

$\{e_{ij}\}$ er $N(0,\sigma_e^2)$

$\{f_{ijh}\}$ er $N(0,\sigma_f^2)$, får vi variansanalysen i tabel 4.2.10.

Variationsårsag	DF	MS	E(MS)
Sorter	$k-1$	s_s^2	$\sigma_f^2 + r\sigma_e^2 + \frac{nr}{k-1}\sum(\mu_i-\bar{\mu})^2$
Residualer	$k(nr-1)$	s_ε^2	$\sigma_f^2 + \frac{r(n-1)}{nr-1}(\sigma_\beta^2+\sigma_e^2)$

Tabel 4.2.10 Variansanalyse for modellen i (4.2.12) under forudsætning af at modellen i (4.2.11) er korrekt.

Vi ser, at under $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = \bar{\mu}$ vil de to varianser, s_s^2 og s_ε^2, i almindelighed ikke have samme forventning og en F-test for H_0 ved $F = s_s^2/s_\varepsilon^2$ vil da ikke være korrekt. For at undersøge, hvornår de to varianser - under H_0 - har samme forventning, kan vi opstille ligningen:

$$\sigma_f^2 + r\sigma_e^2 = \sigma_f^2 + \frac{r(n-1)}{nr-1}(\sigma_\beta^2 + \sigma_e^2)$$

For σ_f^2 meget større end $r\sigma_e^2$ og σ_f^2 meget større end σ_β^2 vil de to udtryk være tilnærmelsesvis lige store uanset σ_e^2 og σ_β^2. Er σ_f^2 derimod ikke meget stor sammenlignet med $r\sigma_e^2$ og σ_β^2, vil de to udtryk kun være tilnærmelsesvis lige store hvis:

$$\frac{\sigma_\beta^2}{\sigma_e^2} \approx n\,\frac{r-1}{n-1}$$

Hvis $\sigma_\beta^2/\sigma_e^2 > n(r-1)/(n-1)$ vil forventningen af s_ε^2 være større end forventningen af s_s^2, og vi vil derfor få for få signifikante udslag. Omvendt vil vi få for mange signifikante udslag, hvis $\sigma_\beta^2/\sigma_e^2 < n(r-1)/(n-1)$. I disse betragtninger har vi antaget, at s_ε^2 gange en konstant er fordelt som en χ^2-variabel med $k(nr-1)$. I grænsetilfældene, hvor $\sigma_\beta^2/\sigma_e^2 \approx n(r-1)/(n-1)$ vil afvigelser herfra kunne invalidere ovennævnte betragtninger.

I forsøgene med kogeærter har frømålene hidtil været analyseret nogenlunde som nævnt ovenfor (se side 59). Desværre er det ikke muligt at sammenligne resultater opnået ved de to modeller, da parcelnummeret for de enkelte frø ikke er registreret i årene 1969-1977. Derimod kan vi sammenligne resultaterne for alle de andre karakterer. Desuden er frømålene i 1978 registreret på lignende vis som de øvrige karakterer, og registreringerne på frømålene i dette år kan da også benyttes i en sammenligning af de to modeller.

For at undersøge, hvorvidt antallet af signifikante udslag over- eller undervurderes, når man ser bort fra parcelinddelingen, er variansen på differencen mellem to sortsgennemsnit beregnet for begge modeller. I tabel 4.2.11 og 4.2.12 er kvotienten mellem disse to varianser anført for samtlige kontinuerte karakterer i 1976 og 1977 samt frømålene i 1978.

Karakter:	1	2	5	6	11	12	16	17	18	19	20	21	25	26	27
1976	.47	.40	.80	.32	1.79	.85	.44	.50	.28	.13	.27	.24	.90	.51	-
1977	.12	.30	.21	.14	.60	.99	1.12	.89	.81	.66	.30	.32	.42	.75	.91

Tabel 4.2.11 Kvotienter mellem varianserne på differencen mellem to sortsgennemsnit ved anvendelse af modellen i (4.2.12) og modellen i (4.2.11) for de kontinuerte karakterer i 1976 og 1977.

Karakter	22	23	36
Var(differens)	.17	.25	.69

Tabel 4.2.12 Kvotienter mellem varianserne på differencen mellem to sortsgennemsnit ved anvendelse af modellen i (4.2.12) og modellen i (4.2.11) for frømålene i 1978.

I de fleste tilfælde er kvotienten mindre end 1 - ofte væsentlig mindre end 1 - og for disse ville man få for mange signifikante forskelle, dersom man så bort fra parcelinddelingen.

I tabel 4.2.13 er det aktuelle antal signifikante forskelle ved sammenligning af samtlige par af 18 sorter i 1978-forsøget anført. Heraf fremgår det, at et væsentligt antal sortsdifferencer, som ikke betragtet som forskellige ved anvendelse af model (4.2.11), vil blive betragtet som forskellige ved anvendelse af den forkerte model (4.2.12).

Da resultaterne næppe ville have været væsentlig forskellige, dersom der ved benyttelse af model (4.2.12) ikke havde været registreret nøjagtig det samme antal enheder fra hver af de to blokke, må vi forvente, at en analyse af frømålene fra 1969-1977 ved (4.2.12) ville have givet alt for mange signifikante sortsforskelle.

	Model (4.2.11)			Model (4.2.12)		
Karakter	22	23	36	22	23	36
α						
.01	79	42	82	108	104	99
.10	94	95	109	125	118	118

Tabel 4.2.13 Antal sortsdifferencer større end $LSD_{1-\alpha}$ for frømålene i 1978 ved sammenligning af samtlige par af 18 sorter.

4.3 UNDERSØGELSE FOR SELVSTÆNDIGHED

Der er undersøgt multivariate og univariate test. I årene 1975-1977 er der stort set anvendt de samme karakterer i alle 3 år (kun 5 af de karakterer, som har været med i mindst et af årene, er ikke med i alle år). Ser vi bort fra frømålene, hvor registreringerne ikke kan henføres til en bestemt parcel, er der 21 karakterer og 6 kvotienter, som har været med i alle de tre år. Af disse tre år var 1976 og 1977 de med det største antal sorter i forsøget og dermed også årene med de fleste frihedsgrader til bestemmelse af residualvarianserne. Undersøgelserne er derfor begrænset til de nævnte tre år og med hovedvægten lagt på årene 1976 og 1977. Det er valgt at udføre beregningerne på logaritmerede data.

4.3.1 Anvendte karaktersæt

I 1976 og 1977 er der henholdsvis 17 og 16 frihedsgrader til bestemmelse af residualvariansen. Da der kræves mindst lige så mange frihedsgrader, som der er karakterer, for at udføre en Hottellings T^2-test, har det således ikke været muligt at udføre den multivariate test med anvendelse af alle karakterer under et. Der har været anvendt 7 forskellige karaktersæt (tabel 4.3.1), som er valgt på forskellig vis.

Sæt nr.	karakter	Udvælgelsesmetode
1	1, 3, 4, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 17	UPOV guidelines for haveært
2	1, 3, 4, 8, 11, 12, 14, 15, 25, 26	Modifikation af 1
3	1, 7, 8, 15, 20, 21, 26, 34	Selektion, 1975
4	1, 5, 7, 11, 12, 19, 20, 26, 32, 33	Selektion, 1976
5	2, 3, 4, 8, 12, 14, 16, 17, 26, 34	Selektion, 1977
6	2, 3, 5, 7, 9, 20, 25, 26, 33, 34	Selektion, 1975-1976
7	1, 7, 12, 14, 20, 21, 25, 26, 33, 34	Varianskomponenter

Tabel 4.3.1 Anvendte karaktersæt ved undersøgelse for selvstændighed.

I karaktersæt nr. 3 er der 8 karakterer, mens der i de øvrige er 10 karakterer i hver. Karaktersæt nr. 1 består af de karakterer, som foruden at være med i denne undersøgelse, også er nævnt som obligatoriske karakterer i UPOV's guidelines for kogeærter (Anon 1974c). Da lavbladede syntes at have gode sortsadskillende egenskaber, blev disse anvendt i karaktersæt nr. 2 i stedet for småbladede.

Ved udvælgelse af karaktersæt nr. 3, 4, 5 og 6 blev det forsøgt at vælge karakter, så afstanden mellem de sortspar, som lignede hinanden mest, blev størst mulig.

Selektionsmetoden for karaktersæt 2, 3 og 4, der er en modifikation af en forward selektion, kan beskrives således:

Trin 1: Vælg den karakter/kvotient som maximerer $C = \min_{(i,i')\in A} \overline{D}^2_{i,i'}$ hvor $\overline{D}^2_{i,i'}$ er stikprøveversionen af Mahalanobis afstand og er givet ved (2.3.7). Her betegner A mængden af alle sortspar, hvor begge sorter er enten gulfrøede eller grønfrøede. Det vil sige, at afstande mellem sortspar, hvor en sort er gulfrøet og en sort er grønfrøet, ikke har nogen indflydelse på C - da sådanne sortspar kan adskilles på frøfarven.

Trin 2: Vælg den karakter/kvotient som i kombination med de allerede valgte karakterer/kvotienter maximerer C (alle som ikke er valgt, undersøges en efter en)

Trin 3: Alle de karakterer/kvotienter, som er valgt på et tidligere tidspunkt, udskiftes en efter en med de, som endnu ikke er valgt, og det undersøges, om en eller flere af disse udskiftninger øger C. I så fald vælges den, som maximerer C.

Trin 4: Trin 2-3 gentages indtil det valgte karaktersæt indeholder et på forhånd fastlagt antal karakterer.

Trin 5: Udskriv selektionskriteriet, C, det valgte karaktersæt og samtlige $D^2_{i,i'}$-værdier ($i=1,2,\ldots,k$; $i'=1,2,\ldots,k$; $i \neq i'$).

Det har desværre ikke været muligt at undersøge, hvorvidt den beskrevne metode giver et nær-optimalt karaktersæt, men en lignende metode har i anden forbindelse vist sig at være nær-optimal (McHenry 1978).

Karaktersæt nr. 6 er valgt på baggrund af en model for sorternes årsgennemsnit:

$$X_{ia} = \mu_i + \beta_a + \varepsilon_{ia}$$

hvor $i = 1,2,\ldots,k$, sortsnumre

$a = 75,76,77$, år

$\{X_{ia}\}$, $\{\mu_i\}$, $\{\beta_a\}$ og $\{\varepsilon_{ia}\}$ er p-dimensionale vektorer.

p = antal karakterer

k = antal sorter

X_{ia} = gennemsnit af registreringerne på individerne i den i'te sort i det a'te år.

μ_i = middelværdi af den i'te sort

β_a = effekt af det a'te år

ε_{ia} = tilfældig virkning af den i'te sort i det a'te år

$$\sum_{a=75}^{77} \beta_a = 0$$

$\{\varepsilon_{ia}\}$ antages uafhængige og normalfordelt $N(0,\Sigma_x)$.

Som selektionskriterium er anvendt $C = \min_{(i,i')\in A} \gamma^2_{i,i'}$, hvor $\gamma^2_{i,i'}$ er et centralt estimat for Mahalanobis afstand og er givet ved

$$\gamma^2_{i,i'} = (\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_{i'})' \hat{\Sigma}_x (\mu_i - \mu_{i'}) \frac{m-p-1}{m} - \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right) p$$

(jvf. 2.3.8),

hvor m = antal frihedsgrader ved bestemmelse af $\hat{\Sigma}_x$

n_i = antal gentagelser (= antal år) for sort i.

Selektionsmetoden har været den samme som ved udvælgelse af karaktersæt nr. 3, 4 og 5.

Karaktersæt nr. 7 er valgt på baggrund af en varianskomponent for sorterne

$$X^\ell_{iaj} = \mu^\ell + A^\ell_i + B^\ell_a + C^\ell_{ia} + D^\ell_{aj} + E^\ell_{iaj}$$

i = 1,2,...,k, sortsnummer

a = 76, 77 , år

j = 1,2, , bloknummer

X_{iaj} = gennemsnit af registreringerne på individerne i den i'te sort i det a'te år i den j'te blok for karakter ℓ.

A^ℓ_i = effekt af den i'te sort for karakter ℓ.

B^ℓ_a = effekt af det a'te år for karakter ℓ.

C^ℓ_{ia} = effekt af den i'te sort i det a'te år for karakter ℓ.

D^ℓ_{aj} = effekt af den j'te blok i det a'te år for karakter ℓ.

E^ℓ_{iaj} = effekt af den i'te sort i det a'te år i den j'te blok.

$\{A^\ell_i\}$ antages $N(0,\sigma^{\ell^2}_A)$

$\{B^\ell_a\}$ antages $N(0,\sigma^{\ell^2}_B)$

$\{C^\ell_{ia}\}$ antages $N(0,\sigma^{\ell^2}_C)$

$\{D^{\ell}_{aj}\}$ antages $N(0,\sigma^{\ell^2}_D)$

$\{E^{\ell}_{iaj}\}$ antages $N(0,\sigma^{\ell^2}_E)$

$\{A^{\ell}_i\}$, $\{B^{\ell}_a\}$, $\{C^{\ell}_{ia}\}$, $\{D^{\ell}_{aj}\}$ og $\{E^{\ell}_{iaj}\}$ antages indbyrdes uafhængige.

Som selektionskriterium er beregnet

$$C^{\ell} = \frac{\sigma^{\ell^2}_A}{\sigma^{\ell^2}_A + \sigma^{\ell^2}_C + \sigma^{\ell^2}_E} ,$$

hvorefter de karakterer svarende til de 10 største C^{ℓ} er valgt, dog således at der kun er valgt 1 blandt 2 eller flere stærkt korrelerede karakterer.

Ved valg af karaktersæt nr. 3, 4, 5, 6 og 7 har der været selekteret blandt samtlige 21 karakterer og 6 kvotienter, omend det ikke har været muligt at have både en kvotient og de to dertil hørende originalkarakterer med i analysen på samme tid, da residual variansmatricen i så fald vil være singulær.

Foruden på hvert af de ovennævnte karaktersæt er der udført en samlet analyse ved at kombinere flere multivariate test (jvf. afsnit 2.3.5). Karaktererne er her samlet i 6 grupper (tabel 4.3.2), og testniveau i de enkelte test er proportionalt med antal karakterer (jvf. afsnit 2.3.5 og tabel 4.3.2).

Da der er regnet på logaritmetransformerede data, er kvotienter automatisk omfattet af en analyse på de registrerede data, og disse er derfor ikke direkte inddraget i den kombinerede analyse.

Gruppe nr.	Karakterer	Anvendte testniveauer i de enkelte grupper for testniveau .10, .05 og 0.1 i den kombinerede analyse		
		.10	.05	.01
1	1,2,3,4,5,6,7,8a,9	.03333	.01667	.003333
2	11,12,14,15,(31,32)	.02222	.01111	.002222
3	16,17,(33)	.01111	.00556	.001111
4	18,19,(34)	.01111	.00556	.001111
5	20,21,(35)	.01111	.00556	.001111
6	25,26,(37)	.01111	.00556	.001111

Tabel 4.3.2 Oversigt over karakterer i den kombinerede analyses enkelte grupper samt anvendte testniveauer i de enkelte gruppetest.

4.3.2 Sortsadskillelse

For at undersøge, om de valgte karaktersæt er i stand til at adskille sorterne, er der talt, hvor mange sortspar, som ikke ville være signifikant forskellige på niveauerne α = .10, .05 og .01. Da gul- og grønfrøede sortspar let kan adskilles uden brug af de her benyttede registreringer, er der kun medtaget sortspar, hvor begge sorter er enten gul- eller grønfrøede. I årene 1975, 1976 og 1977 er der undersøgt det i tabel 4.3.3 anførte antal sortspar.

År	Gulfrøede	Grønfrøede	Gul- + grønfrøede
1975	6	10	16
1976	45	28	73
1977	36	28	64

Tabel 4.3.3 Antal sortspar undersøgt for signifikante forskelle.

Ved vurdering af frømålene for de enkelte år er der fundet en god overensstemmelse for en given sort fra år til år. Ved udvælgelse af karaktersæt 7 ville frølængden således have været den først valgte karakter, hvis ikke frømålene forlods måtte udskydes, da de ville give systematiske fejl (da parcelinddeling ikke haves for disse) i de efterfølgende beregninger. (Også F-testen, $F = MS_{sort}/MS_{år\ x\ sort}$, er større for frølængden end for nogen anden karakter i den pågældende analyse). Man må derfor forvente, at en eller flere af frømålene også kunne have været anvendelige i nogle af de andre karaktersæt, dersom de havde været registreret således, at de kunne henføres til en bestemt parcel. Yderligere må man nok forvente, at de følgende resultater vedrørende multivariate og univariate test ville have udvist en stærkere signifikans, dersom det havde været muligt at inkludere frømålene.

4.3.2.1 Multivariate test

I venstre del af tabel 4.3.4 er anført det antal sortspar - ud af de i tabel 4.3.3 anførte - som ikke er signifikant forskellige på hver af de tre valgte niveauer. Foruden resultater for hver af de valgte karaktersæt, er der nederst til venstre anført resultater fra den kombinerede analyse (jvf. tabel 4.3.2).

Ved en bedømmelse af karaktersættenes egnethed til adskillelse af sorterne bør man se bort fra karaktersæt 3 i 1975, karaktersæt 4 i 1976 og karaktersæt 5 i 1977. Dette skyldes, at de nævnte karaktersæt er udvalgt på baggrund af data fra de pågældende år, hvorfor man må forvente, at resultaterne i disse år er "biased" på grund af den systematiske selektion. Dette synes også at fremgå af resultaterne for de nævnte karaktersæt ved sammenligning med det/de øvrige år. For karaktersæt 4 i 1977 og karaktersæt 5 i 1976 er der således henholdsvis 13 og 9 sortspar, som ikke er signifikant forskellige på 1% niveauet med 0 sortspar i det år, som danner grundlag for valg af det pågældende karaktersæt. Karaktersæt 3 udviser samme tendens for så vidt angår testniveauerne 5% og 10%, hvorimod der ikke er nogen tydelig forskel for testniveau 1%.

Karaktersæt			Multivariate test									Univariate test								
nr.	Karakterer		gulfrøede			grønfrøede			gule + grønne			gulfrøede			grønfrøede			gule + grønne		
		År \ α	.10	.05	.01	.10	.05	.01	.10	.05	.01	.10	.05	.01	.10	.05	.01	.10	.05	.01
1	1,3,4,8,11,12,14,15,16,17	76	0	0	1	1	2	6	1	2	7	0	0	0	2	2	9	2	2	9
1		77	1	1	2	0	1	8	1	2	10	1	1	4	0	0	3	1	1	7
2	1,3,4,8,11,12,14,15,25,26	76	0	0	1	0	1	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		77	0	0	3	0	2	2	0	2	5	0	0	2	0	0	2	0	0	4
3	1,7,8,15,20,21,26,34	75	0	0	0	0	0	6	0	0	6	0	0	1	3	4	6	3	4	7
3		76	1	1	1	0	1	4	1	2	5	1	1	1	0	0	4	1	1	5
3		77	0	0	2	1	1	5	1	1	7	0	0	0	1	1	2	1	1	2
4	1,5,7,11,12,19,20,26,32,33	76	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	2
4		77	0	0	3	0	1	10	0	1	13	0	0	1	0	0	1	0	0	2
5	2,3,4,8,12,14,16,17,26,34	76	0	2	4	1	1	5	1	3	9	0	0	2	1	1	3	1	1	5
5		77	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	3
6	2,3,5,7,9,20,25,26,33,34	76	0	0	3	0	0	2	0	0	5	0	0	1	0	0	0	0	0	1
6		77	0	0	2	0	0	4	0	0	6	0	0	1	0	0	0	0	0	1
7	1,7,12,14,20,21,25,26,33,34	76	0	1	3	0	0	0	0	1	3	1	1	1	0	0	0	1	1	1
7		77	1	1	1	0	0	3	1	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Alle	1,2,3,4,5,6,7,8a,9;11,12,14,	75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	1	0	2	6	0	2	7
Alle	15;16,17;18,19;20,21;25,26	76	0	1	1	0	0	1	0	1	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Alle	(;31;32;33;34;35;37)	77	0	0	2	0	0	1	0	0	3	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Tabel 4.3.4 Antal ikke signifikant forskellige sortspar ved anvendelse af nogle karaktersæt og tre signifikansniveauer.

De bedste karaktersæt synes at være nr. 2, 6 og 7. Her er karaktersæt nr. 6 og 7 valgt på grundlag af data fra flere år - heriblandt 1976 og 1977 - således at resultaterne er "biased". Denne forventes dog at være væsentlig mindre end for de ovenfor nævnte karaktersæt (nr. 3 i 1975, nr. 4 i 1976 og nr. 5 i 1977) da det ikke er nøjagtig de samme data, som indgår i selektionsberegningen og beregning af de viste test. Således er estimatet for den variansmatrix, som er anvendt ved udvælgelse af karaktersæt 6, uafhængig af estimaterne for de variansmatricer, der er anvendt ved signifikansberegningerne. Derimod er der nogen korrelation mellem middelværdiestimaterne, brugt i henholdsvis selektionsberegningerne og signifikansberegningerne. Tilsvarende gælder for karaktersæt 7, hvor middelværdiestimaterne og diagonalelementerne i estimaterne for variansmetricerne, benyttet ved signifikansberegningerne, i nogen grad er korreleret med tilsvarende estimater anvendt ved selektionsberegningerne.

I karaktersæt 2 er to karakterer, 25 og 26, valgt efter, at der er regnet på data, men da der ikke er anvendt noget systematisk selektionskriterium, må en eventuel "bias" forventes at kunne negligeres.

Ingen af de valgte karaktersæt synes at have helt så gode sortsadskillende egenskaber som alle karakterer under et i den kombinerede analyse, omend forskellene er små for så vidt angår de ovenfor nævnte tre bedste karaktersæt (nr. 2, 6 og 7).

Antallet af undersøgte sortspar har både i 1976 og 1977 været større for de gulfrøede end for de grønfrøede sorter. Alligevel ser der ud til at være flere grønfrøede sortspar end gulfrøede sortspar, som ikke bliver signifikant forskellige.

Betragter vi frekvensen af sortspar, som ikke er signifikant forskellige på 1% niveauet, finder vi, at denne - som gennemsnit af alle karaktersættene - er 2.2 gange større for de grønfrøede sortspar end for de gulfrøede sortspar i 1976 og tilsvarende 3.2 gange større i 1977. Dette kan sandsynligvis forklares ved, at de grønfrøede sorter indbyrdes er mere beslægtede end de gulfrøede sorter (jvf. tabel 4.3.9).

4.3.2.2 Univariate test

På de samme karaktersæt, som anvendt ved de multivariate test, er der udført en række univariate Student's t-test. Disse er samlet til en test for hvert karaktersæt ved anvendelse af Bonferronis ulighed, idet et sortspar er erklæret signifikant forskellig, hvis

$$\max_{\ell=1,2,\ldots,p} |T^{\ell}_{i,i'}| \geq t_{1-\alpha/2p,m}$$

hvor $T^{\ell}_{i,i'} = (\bar{X}^{\ell}_{i.} - \bar{X}^{\ell}_{i'.})\sqrt{\frac{n}{2}}/s^{\ell}$

p = antal karakterer i sættet

$t_{1-\alpha/2p,m}$ = $(1-\alpha/2p)$-fraktilen i Student's t-fordeling med m frihedsgrader

$\bar{X}^{\ell}_{i.}$ = gennemsnit af karakter ℓ for sort i

s^{ℓ} = standardafvigelse for karakter ℓ med m frihedsgrader.

Resultaterne heraf er anført i højre halvdel af tabel 4.3.4. Som for de multivariate test synes karaktersæt 2, 6 og 7 at være de bedste. Der er næppe nogen væsentlig forskel på disse tre karaktersæts sortsadskillende evne og en tilsvarende anvendelse af alle de 21 karakterer samt 6 kvotienter (se tabel 4.3.4, højre halvdel).

4.3.2.3 Sammenligning af multivariate og univariate test

Ved en sammenligning af antal ikke signifikant forskellige sortspar i tabel 4.3.4 finder man, at der er flere ved anvendelse af den multivariate test end ved anvendelse af de tilsvarende univariate test (tabel 4.3.5).

Da alle de anvendte sorter må anses for at være forskellige, ser det således ud til, at de univariate test har en større styrke end den multivariate test for så vidt angår de to forsøg med kogeærter i 1976 og 1977. I begge disse forsøg har der været relativt få frihedsgrader (16 eller 17) til bestemmelse af residualvariansen.

År	Sorts-farve	Antal karaktersæt med flest ikke signifikant forskellige sortspar ved anvendelse af: Multivariate test	Univariate test	Antal karaktersæt med ens antal ikke signifikante sortspar ved anvendelse af de to former for test
76	gul	6	0	1
76	grøn	3	1	3
77	gul	6	1	0
77	grøn	6	0	1

Tabel 4.3.5 Sammenligning af antal ikke signifikante sortspar på 1% niveauet ved anvendelse af henholdsvis multivariate og univariate test for karaktersæt nr. 1, 2, 3, 5, 6, 7 og alle i 1976 samt karaktersæt nr. 1, 2, 3, 4, 6, 7 og alle i 1977.

I tabel 4.3.6 er teststyrken af en multivariat test med 10 karakterer beregnet for forskellige ikke-centralitetsparametre samt for henholdsvis 16, 17 og 50 frihedsgrader. Til sammenligning er anført de tilsvarende teststyrker for en række univariate test, idet det er forudsat at karaktererne her er uafhængige (jvf. afsnit 2.3.4). Det fremgår heraf, at teststyrken for den multivariate test er meget mere følsom over for en reduktion af antal frihedsgrader end den univariate test. Det kan derfor ikke udelukkes, at den multivariate test ville have været lige så god som de univariate test, såfremt der havde været flere frihedsgrader til bestemmelse af residualvariansen.

Test x)	Antal frihedsgrader	Ikke-centralitetsparameter, λ									
		1	2	4	6	8	12	24	36	48	100
Multivariate	16	.01	.02	.03	.04	.05	.07	.19	.32	.46	.86
	17	.01	.02	.03	.04	.05	.09	.22	.39	.54	.92
	50	.02	.03	.06	.09	.14	.27	.68	.91	.98	1.00
Univariate 1	16	.01	.02	.03	.04	.06	.09	.22	.37	.53	.95
	17	.02	.02	.03	.05	.06	.09	.22	.38	.54	.95
	50	.02	.02	.04	.06	.08	.12	.30	.50	.68	.99
Univariate 2	16	.02	.03	.06	.11	.18	.34	.79	.96	.99	1.00
	17	.02	.03	.06	.12	.19	.36	.80	.96	.99	1.00
	50	.02	.04	.09	.17	.26	.49	.92	.99	1.00	1.00

x) Multivariate: Hottellings T^2-test.

Univariate 1: 10 Student's t-test kombineret ved hjælp af Bonferronis ulighed. Alle karakterer antages at bidrage lige meget til sortsadskillelsen.

Univariate 2: Som univariate 1, men kun 1 karakter antages at bidrage til sortsadskillelsen.

Tabel 4.3.6 Beregnede teststyrker for forskellige test - med testniveau, $\alpha = 0.01$ - ved anvendelse af 10 karakterer, som - for så vidt angår de univariate test - antages uafhængige.

4.3.3 Afstandsmål

Da det er ønskeligt ved sortsafprøvningen at have en "ligheds-koefficient"/"forskellighedskoefficient", er det undersøgt, om de beregnede afstande kan anvendes som en sådan "forskellighedskoefficient". For at kunne anvendes til dette formål, må man forlange, at afstandene er konsistente fra år til år samt at de sortspar, som har de mindste afstande, også er de sortspar, som af fagfolk anses for at ligne hinanden mest (evt. være mest beslægtede).

Undersøgelsen af afstandsmålenes egnethed er foretaget på grundlag af samtlige parvise afstande mellem de 16 sorter, som var med i forsøgene både i 1976 og 1977. Afstandsmålene har været D^2-værdierne (jvf. 2.3.7). Der er ikke anvendt centrale estimater, da der i begge år har været 2 gentagelser og meget nær samme antal frihedsgrader (henholdsvis 17 og 16) til bestemmelse af residualvariansen, hvorfor D^2-værdierne i de to år må betragtes som sammenlignelige. Dertil kan tilføjes, at logaritmetransformerede afstande synes at være mere varianshomogene, når der benyttes D^2-værdier, end når der anvendes centrale estimater.

Variansen på $D^2_{i,i'}$ er stærkt afhængig af $\delta^2_{i,i'}$ (jvf. 2.3.9).

Da variansheterogenitet komplicerer de analyser, som skal udføres, er der i stedet benyttet logaritmerede D^2-værdier, da disse tilnærmelsesvis har den samme varians, når blot $\delta^2_{i,i'}$ er rimelig stor.

I tabel 4.3.7 er de approximativt beregnede varianser (jvf.(2. 3.11)) vist for $\delta^2_{i,i'}$ = 0, 50, 200 og ∞ for hvert af de 2 år, 1976 og 1977, og for to forskellige antal karakterer.

Antal karakterer	År / $\delta^2_{i,i'}$	1976				1977			
		0	50	200	∞	0	50	200	∞
8		0.67	0.42	0.36	0.33	0.75	0.49	0.43	0.40
10		0.80	0.59	0.53	0.50	1.00	0.77	0.70	0.67

Tabel 4.3.7 Approximativt beregnede varianser på logaritmerede estimater for Mahalanobis afstande.

Af tabellen fremgår det, at logaritmetransformerede data kan antages tilnærmelsesvis varianshomogene, hvis

$$\delta^2_{i,i'}(i,i' = 1,2,...,k;i \neq i'),$$

alle er større end ca. 50.

Foruden de ovenfor nævnte afstande fra hver af de 7 karaktersæt er der beregnet afstandsmål på grundlag af den kombinerede analyse (jvf. side 98) ved at addere D^2-værdierne fra hver af de 6 grupper (jvf. 2.3.20)). Endelig er der beregnet afstandsmål ved at addere de univariate D^2-værdier for de 21 karakterer, som er medtaget i den kombinerede analyse. Disse afstandsmål er behandlet på lignende vis, som D^2-værdierne fra de 7 karaktersæt og er benævnet henholdsvis "komb." og "sum" i de efterfølgende tabeller.

4.3.3.1 Konsistens fra år til år

For at bedømme om afstandsmålene for de enkelte karaktersæt er konsistente fra år til år, blev beregnet korrelationskoefficienter mellem de logaritmetransformerede afstande i de to år (19 76 og 1977). Desuden beregnedes variansen på differencen mellem de to års logaritmetransformerede afstande, idet jo mindre denne varians er, jo mere konsistent er de to års afstandsmål.

Da registreringerne i de to år må antages at være uafhængige, må man forvente at variansen på differencerne er lig summen af varianserne på de enkelte tal. Ved sammenligning af de fundne varianser i tabel 4.3.8 med de teoretiske varianser i tabel 4.3. 7, finder man imidlertid, at de fundne varianser kun er ca. halvt så store som forventet. Dette skyldes sikkert, at de fundne varianser er biased estimater for variansen på en differens, for differencerne er ikke indbyrdes uafhængige - det samme estimat for variansmatricen indgår i alle D^2-værdier fra det samme år og dermed i alle differencerne, desuden har sæt af 15 differencer en fælles gennemsnitsvektor i hvert af de 2 år.

Ved sammenligning af varianserne er det antaget, at differencerne for de enkelte sæt er normalfordelte, og at den før omtalte bias er den samme for alle karaktersæt. Derimod er der taget hensyn til, at differencer fra forskellige karaktersæt kan være korrelerede (jvf. Snedecor & Cochran 1967, side 195-197).

Karaktersæt		Korrelations-koefficient	varians på differens
nr.	karakterer		
5	2,3,4,8,12,14,16,17,26,34	.541	.885
1	1,3,4,8,11,12,14,15,16,17	.547	.554 a
2	1,3,4,8,11,12,14,15,25,26	.482	.454 a
6	2,3,5,7,9,20,25,26,33,34	.525	.420 a b
7	1,7,12,14,20,21,25,26,33, 34	.403	.412 a b
4	1,5,7,11,12,19,20,26,32, 33	.561	.402 a b
sum	1+2+3+4+5+6+7+8a+9+11+12 +14+15+16+17+18+19+20+21 +25+26+31+32+33+34+35+37	.712	.326 b c
3	1,7,8,15,20,21,26,34	.650	.315 b c
komb.	1,2,3,4,5,6,7,8a,9;11,12, 14,15;16,17;18,19;20,21; 25,26	.619	.280 c

Varianser mærket med samme bogstav er ikke signifikant forskellig på 5% niveauet.

Tabel 4.3.8 Korrelationskoefficienter mellem logaritmetransformerede afstande i 1976 og 1977 samt variansen på differencen mellem de samme logaritmetransformerede afstande i de to år.

Da varianserne er afhængige af det antal karakterer, som indgår i karaktersættene, må man ved sammenligning af disse tage hensyn hertil (jvf. tabel 4.3.7). Derfor er det svært at afgøre, om karaktersæt 3 er mere konsistent end karaktersæt 5, 1 og 2, således som antydet af varianserne i tabel 4.3.8, da netop karaktersæt 3 indeholder det færreste antal karakterer, og derfor af denne grund må forventes at have en mindre varians, dog synes karaktersæt 5 ikke at være særlig konsistent, idet variansen på differencerne her er væsentlig større end for de andre karaktersæt med det samme antal karakterer.

Benytter man korrelationskoefficienterne til bedømmelse af konsistens - i stedet for varianser på differencer - får man et lidt andet billede, men dog med væsentlige ligheder. Således er karaktersættene med de tre mindste varianser på differencer de samme, som har de tre største korrelationskoefficienter. Blandt disse karaktersæt er der to, som omfatter alle de benyttede karakterer, "sum" og "komb.".

4.3.3.2 Sammenhæng mellem afstandsmål og slægtskabskoefficienter

På grundlag af de oprindelser - som kendes for de enkelte sorter - er der beregnet slægtskabskoefficienter (Andresen et al., 1977, side 32) mellem de 16 sorter, der var med i både 1976 og 1977 (tabel 4.3.9). De beregnede slægtskabskoefficienter må for en del sortspar betragtes som minimumsværdier - specielt kan det ikke udelukkes, at nogle af sortsparrene med slægtskabskoefficienten nul kan være beslægtede. Dette skyldes, at de sorter, der er anført som oprindelse, kan være indbyrdes beslægtede gennem fælles forældre i tidligere generationer. Muligheden for at slægtskabskoefficienterne er for små må anses for at være størst, hvis begge sorter kommer fra den samme forædler (se tabel 4.3.9).

For at undersøge om de sortspar, som er nærtbeslægtede (høje slægtskabskoefficienter), også har små afstande, er følgende udført for hvert karaktersæt og hvert af de to år: De 15 sortspar, hvori en bestemt sort indgår, er samlet og tildelt rangnumre, således at sortsparret med den mindste afstand har fået nr. 1 og sortsparret med den største afstand har fået nr. 15. For hver sort er der i tabel 4.3.9 fundet den anden sort, hvormed den pågældende sort er mest beslægtet, og rangnummeret for dette sortspar er noteret (tabel 4.3.10). Eksempelvis for sort 2 og karaktersæt 1 i 1976 er det fundet, at sortspar (2,18) havde den 7. mindste afstand blandt de 15 sortspar, hvori sort nr. 2 indgik (sort nr. 18 er den sort, som er mest beslægtet med sort nr. 2).

		Sortsfarve															
		Gul									Grøn						
Forædler	Sort	2	3	4	5	7	8	9	10	11	14	15	17	18	19	20	21
Cebeco	2	1									.016		.094	.125		.031	.031
Cebeco	3		1														
Mansholt	4			1	1												
Mansholt	5			1	1												
Svalöf	7					1		.125		.563							
Svalöf	8						1					.500					
Weibul	9					.125		1		.563							
Svalöf	10								1			.125					
Svalöf	11					.563		.563		1							
Cebeco	14	.016									1		.094	.125	.250	.500	.094
Svalöf	15						.500		.125			1					
Cebeco	17	.094									.094		1	.750		.188	.188
Cebeco	18	.125									.125		.750	1		.250	.250
Mansholt	19										.250				1	.500	.250
Mansholt	20	.031									.500		.188	.250	.500	I	.188
Cebeco	21	.031									.094		.188	.250	.250	.188	1

Tabel 4.3.9 Slægtskabskoefficienter og oprindelse for de 16 sortspar som er med i forsøgene i både 1976 og 1977.

	Karaktersæt																		
		1		2		3		4		5		6		7		komb.		sum	
Sort	År	76	77	76	77	76	77	76	77	76	77	76	77	76	77	76	77	76	77
2		7	7	4	2	3	1	5	5	5	12	2	1	4	1	2	1	6	1
4		2	8	2	6	1	1	1	4	3	6	1	2	1	1	1	2	1	1
5		2	6	1	4	1	1	1	3	3	3	1	6	1	1	1	2	1	1
7		2	6	2	9	3	1	5	3	10	12	3	1	4	3	3	3	3	3
8		6	10	9	9	11	15	9	4	14	11	8	9	10	12	4	12	4	6
9		2	9	2	8	1	1	2	4	4	12	1	4	2	4	1	3	1	4
10		6	3	2	2	2	15	1	1	1	4	1	1	2	15	1	1	2	1
11		1	1	2	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1	1
14		3	2	8	7	5	4	4	4	9	1	2	4	2	3	1	4	6	1
15		10	11	13	11	13	11	11	9	11	9	8	5	14	3	12	12	8	13
17		1	1	1	3	5	3	6	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18		1	1	1	8	4	1	2	1	1	2	2	4	1	1	1	1	1	2
19		1	6	7	6	6	3	2	3	4	10	6	6	9	5	2	2	1	2
20		1	1	3	12	3	3	1	3	3	1	3	9	2	7	3	2	1	1
21		3	2	6	3	4	4	7	6	1	4	4	3	3	2	1	2	1	1
Maximum excl. sort 8 og 15		7	9	8	12	6	15	7	6	10	12	6	9	9	15	3	4	6	4
		9		12		15		7		12		9		15		4		6	
Sum excl. sort 8 og 15		32	53	41	71	39	39	38	40	46	75	28	43	33	45	19	25	26	20
		85		112		78		78		121		71		78		44		46	

Tabel 4.3.10 Rangnumre for afstanden mellem en given sort og den dermed mest beslægtede anden sort for forskellige karaktersæt i 1976 og 1977.

De fleste sorter har rangnumrene som er små for i hvert fald nogle af de anførte karaktersæt. Undtagelser er sort 8 og 15, som for de fleste karaktersæt udviser store tal. For begge disse to sorter er det rangnummeret for sortsparret (8,15), som er anført, idet sort 8 er mest beslægtet med sort 15, og sort 15 er mest beslægtet med sort 8. Da en sort for et givet karaktersæt ikke behøver at ligne begge sine forældre lige meget, er det valgt ved den videre vurdering af de enkelte karaktersæt at se bort fra disse to sorter. (Bemærk, at sort 8 er gulfrøet og sort 15 er grønfrøet).

De bedste karaktersæt er de, der giver små rangtal for alle sorter. Nederst i tabel 4.3.10 er anført summen samt maximum af rangnumrene for de enkelte sorter (exclusiv sort 8 og 15). Heraf fremgår det, at de bedste karaktersæt er de, som inkluderer alle karakterer, nemlig "sum" og "komb.". Der synes ikke at være forskel på de to - her prøvede - metoder til beregning af afstandsmål ud fra alle karakterer.

Blandt de 7 karaktersæt, som ikke omfatter alle karakterer, synes sæt nr. 5 og 2 at være de dårligste, mens karaktersæt 6 og 4 synes at være de bedste.

For at undersøge om de beregnede afstande kan benyttes til at afgøre, hvilke sortspar, der ligner hinanden mest, er det undersøgt om de 5 gulfrøede henholdsvis 5 grønfrøede sortspar med de mindste afstande er sortspar, som er beslægtede eller af fagfolk anses for at ligne hinanden (tabel 4.3.11). De fleste af de heri viste sortspar er beslægtede. Nogle sortspar, som ikke her er blevet betragtet som beslægtede (jvf. tabel 4.3.9) kan findes flere steder i tabellen. Det drejer sig om sortsparrene 7-8, 8-9, 2-3, 17-19, 3-5 og 18-19, som forekommer henholdsvis 12, 9, 8, 4, 3 og 3 gange samt i sortspar 3-4, 4-7 og 14-15, som forekommer 2 gange. Dertil kommer 4 sortspar, 2-4, 2-5, 2-7 og 4-8, som hver forekommer 1 gang. Sort 7 og 8 kommer fra det samme firma, og det er derfor tænkeligt, at også disse to sorter er beslægtede. Sorterne 2 og 3 kommer også fra det samme firma, og kan ligeledes være beslægtede. For alle øvrige sortspar synes der ikke at være nogen nærliggende forkla-

År:	1976										1977									
Frøfarve:	Gul					Grøn					Gul					Grøn				
Karaktersæt / rangnummer:	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	7-9	4-5	9-11	2-3	7-11	17-18	19-20	17-21	14-21	18-19	8-9	7-8	4-7	7-9	3-5	17-18	14-20	14-18	18-20	14-17
2	7-9	4-5	2-3	9-11	7-11	17-18	14-21	18-20	14-17	14-15	2-7	7-9	8-9	2-4	4-5	18-20	14-19	18-21	17-20	20-21
3	4-5	9-11	7-8	2-3	7-9	14-17	14-19	17-19	20-21	17-21	4-5	7-11	9-11	7-9	3-4	14-19	14-17	17-21	17-18	14-21
4	2-3	4-5	2-5	7-9	9-11	14-19	19-20	17-18	17-21	14-17	7-9	3-4	7-8	4-5	8-9	14-19	14-15	14-21	17-19	20-21
5	7-9	3-5	2-3	8-9	9-11	17-18	18-21	14-21	17-21	14-17	7-8	4-7	4-8	2-3	8-9	17-18	14-20	14-18	17-19	14-17
6	4-5	9-11	7-9	7-11	2-3	20-21	17-18	19-21	14-17	18-21	7-11	7-9	7-8	8-9	3-5	14-19	14-21	18-20	20-21	18-21
7	4-5	2-3	7-9	9-11	7-8	19-21	17-18	14-17	14-20	18-21	4-5	7-8	7-9	8-9	7-11	14-21	14-19	17-18	19-21	18-20
komb.	4-5	9-11	7-9	7-8	7-11	17-18	19-21	20-21	14-20	14-19	8-9	7-8	7-9	7-11	4-5	14-19	18-20	14-18	18-19	14-21
sum	9-11	4-5	7-9	7-8	7-11	17-18	19-20	17-19	19-21	18-19	7-8	8-9	4-5	7-9	7-11	19-21	14-20	19-20	14-19	18-20

Tabel 4.3.11 Oversigt over de 5 gulfrøede og 5 grønfrøede sortspar, som har de mindste afstande for forskellige karaktersæt i 1976 og 1977.

ring på, at disse har så små afstande som de, der er fundet her, idet der er tale om sortspar, hvor de to sorter kommer fra hvert sit forædlerfirma. Det drejer sig om ialt 7 sortspar i 1976 og 21 sortspar i 1977 (understreget i tabel 4.3.11). Af disse 28 sortspar forekommer henholdsvis 4, 4, 2, 4, 6 og 2 og 1 i karaktersættene 1 til 7. Der er 2 henholdsvis 3 sortspar i hvert af de to karaktersæt, som omfatter alle karakterer.

Sortsparret 17-18, som er det mest beslægtede sortspar blandt de grønfrøede, har den mindste afstand i 1976 for karaktersættene "komb." og "sum". I 1977 har dette sortspar imidlertid henholdsvis den 11. og 6. mindste afstand blandt de ialt 28 grønfrøede sortspar.

En anvendelse af afstandsmål, for at afgøre hvilke sortspar, der ligner hinanden mest (jvf. tabel 4.3.11), synes således at være ret usikker. Derimod synes afstandsmålene at være rimelig gode til at afgøre, hvilken/hvilke sort(er) en given sort ligner mest (jvf. tabel 4.3.10), især hvis alle karakterer anvendes.

Ved den sidstnævnte anvendelse (hvilken/hvilke sort(er) en given sort ligner mest) sammenlignes afstande, hvor den ene af de to gennemsnitsvektorer indgår i beregning for alle de sammenlignede afstande, mens der ved den førstnævnte anvendelse også sammenlignes afstande, hvori ikke nødvendigvis indgår nogen fælles gennemsnitsvektor (jvf. 2.3.7). To afstande, som har en fælles gennemsnitsvektor, må forventes at være stærkere positivt korrelerede end to afstande, som ikke har nogen fælles gennemsnitsvektor. Da variansen på en differens - for fastholdt varians på de enkelte tal - bliver mindre jo større positiv korrelation, der er mellem tallene, må man forvente at sammenligning af afstande med en fælles gennemsnitsvektor er sikrere end en sammenligning af afstande, hvor begge gennemsnitsvektorer er forskellige.

Det kan derfor ikke udelukkes, at afstandsmålene også kan anvendes til at afgøre, hvilke sortspar, der ligner hinanden mest, hvis variansen på disse gøres mindre f.eks. ved at øge antal gentagelser og/eller antal frihedsgrader til bestammelse af residualvariansen.

4.4 UNDERSØGELSE FOR ENSARTETHED

Undersøgelserne er baseret på talmateriale fra årene 1969, 1970, 1971, 1975, 1976 og 1977, idet enkelte karakterer er udeladt. Karakter 7 og 8 er ikke medtaget, da det er antalsvariable, som sædvanligvis kun antager 3 eller 2 forskellige værdier. Karakter 10, 28 og 32 er udeladt, da der for disse karakterer ikke er fundet et ensartethedsmål, som er tilnærmelsesvis uafhængigt af gennemsnit. Desuden er karakter 13 og 24 ikke medtaget, da de ikke længere benyttes. I 1977 er frømålene, karakter 22, 23 og 36, kun registreret for 6 af de ialt 17 sorter, hvorfor disse karakterer er udeladt i 1977. Alle øvrige karakterer, nævnt i tabel 4.1.2 og 4.1.3, er medtaget.

Ensartethedsmålene er baseret på spredninger og variansmatricer. En række karakterer er transformeret før beregning (jvf. tabel 4.4.1). Logaritmetransformationen svarer til, at man benytter variationskoefficienterne som ensartethedsmål. For nogle få karakterer er der benyttet to forskellige transformationer. Dette skyldes, at der for disse karakterer ikke er fundet en enkelt transformation, som gav spredninger, der var tilnærmelsesvis uafhængige af gennemsnitstallene i alle år.

Transformation	Karakterer
Utransformeret	14 og 15
Logaritme	1-4, 9, 11-12, 16-27,(33[a]), (34-37), 5[b] og 6[b]
Kvadratfod	5[c] og 6[c]
Reciprok	(31 og 33[d])

a) i 1970, 1971 og 1975 b) i 1970, 1971 og 1975

d) i 1976 og 1977 c) i 1969, 1976 og 1977

Tabel 4.4.1 Oversigt over transformationer benyttet ved undersøgelse for ensartethed. Karakter i parentes er ikke benyttet ved beregning af generaliseret varians.

Ved sortsforsøgene har man ønsket at sikre sig imod, at en sort fejlagtig erklæres for uensartet. Da der ved undersøgelse for ensartethed skal tages hensyn til den for arten og karakteren sædvanlige variabilitet (Anon 1974a og Anon 1974b), er det næppe muligt a priori at fastsætte en grænse for, hvor stor variabilitet, der kan accepteres i de enkelte karakterer. Dertil kommer, at variabiliteten må forventes at være afhængig af dyrkningsforholdene - for eksempel vejret. Der er derfor benyttet en test, hvor en nyanmeldt sort sammenlignes med det geometriske gennemsnit af referencesorterne (jvf. 3.3.7).

4.4.1 Univariate test

Indledningsvis benyttedes en model for data som (3.3.4). Ved denne metode fik man - da spredningerne for referencesorterne varierer mere end det, der kan skyldes den tilfældige variation fra parcel til parcel - for mange sorter betragtet som uensartede (tabel 4.4.2).

Alene på baggrund af materialet for 1976 og 1977 synes det således klart, at en sådan testmetode ikke er anvendelig, da man i begge årene har fået væsentlig mere end de forventede - 1% henholdsvis 5% - signifikante udslag.

For at undersøge om logaritmerne af de enkelte sorters standardafvigelser kan approximeres ved en normalfordeling, blev der udført probitanalyser - på tilsvarende vis som ved undersøgelse af parcelresidualernes fordeling (afsnit 4.2.2). Standardafvigelsen for sort i's ℓ'te karakter, s_i^ℓ, blev beregnet ved

$$s_i^\ell = \sqrt{[(s_{i1}^\ell)^2 + (s_{i2}^\ell)^2]/2}$$

hvor s_{i1}^ℓ og s_{i2}^ℓ er sort i's standardafvigelse i henholdsvis blok 1 og blok 2 for karakter ℓ (oftest transformeret). For de fleste karakterer/år kombinationer synes antagelsen om, at data kan beskrives ved en normalfordeling, at være rimelig. Kolmogorov-Smirnovs test (jvf. afsnit 4.2.2.2) gav de i tabel 4.4.3

Karakternr.	α = 0.01 1976	1977	α = 0.05 1976	1977
1	0	1	2	4
2	0	3	1	3
3	1	1	2	2
4	3	0	5	2
5	0	0	1	0
6	1	0	2	1
9	1	0	3	1
11	1	0	3	3
12	0	0	1	2
14	0	1	2	2
15	0	0	1	1
16	1	0	1	3
17	1	0	2	1
18	0	2	4	4
19	5	0	6	2
20	0	0	2	2
21	0	3	0	4
22	1	-	3	-
23	0	-	3	-
25	1	3	3	5
26	1	1	1	3
27	-	1	-	3
31	1	0	2	1
33	0	1	0	2
34	1	1	4	2
35	0	0	0	1
36	0	-	1	-
37	1	3	3	4
sum	20	21	58	58
%	4.1	4.9	11.9	13.6

Tabel 4.4.2 Oversigt over antal sorter, hvor spredningen er signifikant større end det geometriske gennemsnit af de øvrige sorter, når den tilfældige variation fra parcel til parcel benyttes som "fejl".

viste resultater. Det fundne antal signifikante udslag - 12 på 5% niveau og 3 på 1% niveau - er næppe signifikant større end det teoretisk forventede antal på henholdsvis 6.4 og 1.3.

Karakternummer	År					
	69	70	71	75	76	77
2	xx	x		x		
3	x					
4		xx	x			
11						x
16	-			xx		
21	-	-	-			x
23				x		-
31			x			
36					x	-

x signifikant på 5% niveau
xx signifikant på 1% niveau
\- karakter ikke registreret/ikke medtaget

<u>Tabel 4.4.3</u> Oversigt over signifikante Kolmogorov-Smirnov test ved undersøgelse af, om logaritmerne til de enkelte sorters standardafvigelser kan antages normalfordelte. Ialt er 128 karakter/år kombinationer undersøgt.

For videre at undersøge om (3.3.10) kan benyttes til at teste den hypotese, (3.3.7), at en nyanmeldt sort er lige så ensartet som referencesorterne, er samtlige sorter efter tur blevet betragtet som en nyanmeldt sort og testet i (3.3.10) udført for hver enkelt karakter. Resultaterne heraf er vist i tabel 4.4.4.

Af samtlige udførte test udviste 5.3% signifikans på 5% niveauet og 1.2% signifikans på 1% niveauet. Dette er meget nær de teoretisk forventede antal. Af de i tabel 4.4.4 viste marginale, er der kun et, som synes meget større end det tilsvarende forventede antal. Det er de 5 signifikante udslag på 1% niveauet for karakter 3, hvor det forventede antal er 1.4.

Karakter-	α = 0.01								α = 0.05							
nr.	69	70	71	75	76	77	sum	%	69	70	71	75	76	77	sum	%
1	-	0	0	0	0	0	0	0.0	-	0	1	0	1	1	3	4.7
2	0	0	0	0	0	0	0	0.0	0	0	0	1	2	0	3	4.2
3	1	0	1	0	2	1	5	7.0	1	0	1	1	2	1	6	8.5
4	0	1	0	1	0	0	2	2.8	0	1	0	1	0	2	4	5.6
5	0	0	0	0	0	0	0	0.0	0	0	1	1	1	0	3	4.2
6	0	0	0	1	0	0	1	1.4	0	1	0	1	1	1	4	5.6
9	0	1	0	0	0	0	1	1.4	1	1	1	1	0	0	4	5.6
11	0	0	0	0	0	0	0	0.0	0	1	0	1	0	0	2	2.8
12	0	1	0	0	0	0	1	1.4	1	1	1	1	1	1	6	8.5
14	-	0	0	0	0	1	1	1.6	-	0	0	0	2	1	3	4.7
15	-	0	1	0	0	0	1	1.6	-	1	1	1	1	1	5	7.8
16	-	0	0	0	1	0	1	1.6	-	1	0	0	1	1	3	4.7
17	-	0	0	0	0	0	0	0.0	-	0	1	0	1	1	3	4.7
18	-	-	-	0	0	0	0	0.0	-	-	-	1	0	1	2	4.6
19	-	-	-	0	0	0	0	0.0	-	-	-	0	1	0	1	2.3
20	-	-	0	0	0	0	0	0.0	-	-	1	0	0	0	1	1.9
21	-	-	-	0	0	0	0	0.0	-	-	-	0	1	1	2	4.6
22	0	0	0	0	0	-	0	0.0	0	1	0	1	2	-	4	7.4
23	0	1	0	0	0	-	1	1.9	0	1	0	0	0	-	1	1.9
25	-	-	-	0	1	0	1	2.3	-	-	-	1	1	2	4	9.1
26	-	-	-	0	0	1	1	2.3	-	-	-	1	1	1	3	6.8
27	-	-	-	-	-	0	0	0.0	-	-	-	-	-	1	1	5.9
31	0	1	0	0	0	0	1	1.4	0	1	1	1	1	1	5	7.0
33	-	0	0	1	0	0	1	1.6	-	1	0	1	1	2	5	7.8
34	-	-	-	0	1	1	2	4.5	-	-	-	1	1	1	3	6.8
35	-	-	-	0	0	0	0	0.0	-	-	-	0	1	1	2	4.5
36	0	0	0	0	0	-	0	0.0	0	1	0	0	0	-	1	1.6
38	-	-	-	0	0	0	0	0.0	-	-	-	0	0	1	1	2.3
Sum	1	5	2	3	5	4	20		3	12	9	16	23	22	85	
%	1.2	3.1	1.0	1.2	1.0	0.9		1.2	3.6	7.4	4.3	6.6	4.7	5.2		5.3

Tabel 4.4.4 Antal sorter for hvilke standardafvigelsen er signifikant større end det geometriske gennemsnit af de øvrige sorter, når testen udføres ved (3.3.10).

Af tabellen fremgår også, at procent signifikante udslag i de enkelte år er nogenlunde konstante, og der synes således ikke at være nogen afhængighed mellem type I-fejlen og antal sorter. (Antal sorter varierer fra 7 i 1969 til 18 i 1976). Testen kan dog kun anvendes, hvis der er mindst to referencesorter.

I tabel 4.4.5 er det totale antal signifikante udslag fordelt på de enkelte sorter, idet disse dog - for sammenlignings skyld - er omregnet til procent af antal undersøgte karakterer/år kombinationer for pågældende sort. Af tabellen fremgår det, at der er nogen forskel på procent signifikante udslag i de enkelte sorter. Især antallet af signifikante udslag på 5% niveauet for sort 9 er stort. En nærmere gennemgang viser, at 6 af de i-alt 19 udslag skyldes, at karakter 25 og 26 er signifikante i alle de tre år, hvor sort 9 er med i forsøgene. Karakter 30 er signifikant i 1975 og 1977, mens de øvrige 11 signifikante udslag er fordelt på 11 andre karakterer (4 i 1975, 1 i 1976 og 6 i 1977). Dette kunne tyde på, at denne sort er noget mere uensartet end de øvrige - tydeligst for karakter 25 og 26 samt årene 1975 og 1977.

Sortsnr.	Procent α = .01	α = .05	Antal undersøgte karakterer/år kombinationer
1	3.9	10.5	76
2	0.8	5.5	128
3	0.0	2.9	68
4	0.0	2.9	68
5	4.0	5.9	101
6	0.0	3.9	76
7	0.0	3.8	52
8	1.3	10.1	79
9	2.5	24.1	79
10	0.0	7.7	52
11	3.8	7.7	52
12	0.0	0.6	18
13	0.0	0.0	19
14	1.3	2.5	79
15	0.0	1.9	52
16	0.0	4.7	64
17	1.0	4.0	101
18	0.8	3.1	128
19	2.5	3.8	79
20	0.0	0.0	79
21	1.6	2.3	128
22	4.0	4.0	25

Tabel 4.4.5 Procent undersøgte karakterer, hvor standardafvigelsen er signifikant større end det geometriske gennemsnit for de øvrige sorter, når testen udføres ved (3.3.10) samt antal undersøgte karakterer/år kombinationer.

Hvis en sort betragtes som uensartet, såfremt blot en karakter udviser signifikans, kan man få urimelig mange sorter erklæret uensartet (jvf. tabel 2.1.2). Dette kan man sikre sig imod ved at benytte Bonferronis ulighed (3.3.11). Anvendes (3.3.11), bliver antal signifikante sort/år-kombinationer 1 og 2 på henholdsvis 1% og 5% niveauet (tabel 4.4.6), hvilket synes i god overensstemmelse med det forventede antal på henholdsvis 0.7 og 3.6.

År	Sort	Karakter	Signifikans
69	1	3	< 1%
70	5	4 og 9	< 5%

Tabel 4.4.6 År/sort-kombinationer, hvor standardafvigelsen for mindst 1 karakter er signifikant større end det geometriske gennemsnit for de øvrige sorter i det pågældende år, når testen udføres ved (3.3.11).

4.4.2 Multivariate test

Der er undersøgt to mål for ensartethed, som omfatter alle karakterer. Det er den generaliserede varians - herefter kaldet ζ - og produktet af de enkelte karakterers spredninger - herefter kaldet η. Ved testning er der benyttet en testmetode analog til (3.3.10), idet Y_i er givet ved henholdsvis:

$$Y_i = \ln(\hat{\zeta}_i) \qquad (4.4.1)$$

hvor $\hat{\zeta} = |S_i|$

$S_i = \frac{1}{2}(S_{i1} + S_{i2})$

S_{ij} = variansmatrix for den i'te sort i den j'te blok

og

$$Y_i = \ln(\hat{\eta}_i) \qquad (4.4.2)$$

hvor $\hat{\eta}_i = \prod_{\ell=1}^{p} (s_i^\ell)^2$

$$s_i^\ell = \sqrt{\tfrac{1}{2}((s_{i1}^\ell)^2 + (s_{i2}^\ell)^2)}$$

s_{ij}^{ℓ} = spredningen for den ℓ'te karakter i den i'te sort i den j'te blok.

Ved beregning af ζ er kun benyttet de oprindelige registrerede karakterer (dog ofte transformeret, jvf. tabel 4.4.1). Selv om kvotienterne ikke kan antages uafhængige af de oprindelige karakterer, er de medtaget ved beregning af η, da disse karakterer skal undersøges for ensartethed, såfremt de har været benyttet til at adskille en nyanmeldt sort fra referencesorterne (jvf. afsnit 1.2.2).

For at undersøge antagelsen om, at logaritmerne til de to ensartethedsmål kan approximeres ved normalfordeling, er der udført probitanalyser og Kolmogorov-Smirnovs tests (jvf. afsnit 4.2.2.2). Disse undersøgelser viste, at nævnte antagelse synes rimelig.

Ensartet-	α = 0.05						An-		α = 0.05						An-	
hedsmål	69	70	71	75	76	77	tal	%	69	70	71	75	76	77	tal	%
ζ	-	-	-	9	-	-	1	1.4	-	5	18	9	9	8	5	7.0
η	-	-	-	-	-	-	0	0.0	6	5	-	9	-	9,8	5	7.0

Tabel 4.4.7 Sortsnumre for de sorter, hvor de generaliserede ensartethedsmål er signifikant større end det geometriske gennemsnit for de øvrige sorter, når testen udføres ved (3.3.10).

Som for de univariate ensartethedsmål er hver sort efter tur blevet betragtet som en nyanmeldt sort og testen i (3.3.10) udført for hver af de to generaliserede ensartethedsmål (tabel 4.4.7). Det her fundne antal signifikante udslag synes at være i god overensstemmelse med de forventede antal på 0.7 og 3.6 for henholdsvis 1% og 5% test.

I 1975 og 1977 var sort 9's spredning signifikant større end det geometriske gennemsnit for de øvrige sorter i mange karakterer (tabel 4.4.5). Dette synes at afspejle sig i η og i nogen grad også i ζ (sort 9 har den næststørste $\hat{\zeta}$-værdi i 1977 og er næsten signifikant, P = 6.4%). Sort 9 er i øvrigt den eneste af de undersøgte sorter, som har et signifikant stort generelt ensartethedsmål i mere end 1 år. Dette synes at være i god overensstemmelse med de mange signifikante udslag for de enkelte karakterer (tabel 4.4.5).

De to undersøgte generelle ensartethedsmål synes at være lige velegnede. η er imidlertid væsentlig simplere at beregne end ζ, hvorfor det synes rimeligt at vælge dette mål. Dertil kommer, at beregning af ζ ikke er mulig, såfremt antallet af karakterer bliver større end antal frihedsgrader ved beregning af S_i (estimat for den enkelte sorts variansmatrix).

I de foranstående undersøgelser for ensartethed er medtaget flest mulig karakterer, selv om man ved undersøgelse af en given nyanmeldt sort næppe vil betragte alle karakterer som væsentlige, når der undersøges for ensartethed (jvf. afsnit 1.2.2).

5. KONKLUSIONER

5.1 SELVSTÆNDIGHEDSUNDERSØGELSER

5.1.1 Forudsætninger for statistiske analyser

Ved den benyttede opgørelsesmetode forudsættes, at gennemsnitstallene for de enkelte parceller er normalfordelte med ens varians. Begge disse forudsætninger synes at være rimelig opfyldt i de fleste tilfælde. Forudsætningerne synes dog at være lidt bedre opfyldte, dersom man benytter logaritmetransformerede data i stedet for de oprindelige data i disse analyser. At dette er tilfældet bestyrkes af, at spredningen på registreringerne i en parcel for mange karakterer er tilnærmelsesvis proportional med gennemsnittet.

Derimod synes der at være nogle afvigende observationer (parceller). Da der kun er to parceller pr. sort, har det imidlertid ikke været muligt at afgøre, hvilken af de to parceller, der er den afvigende. Det vil derfor være af værdi, at forsøgene bliver anlagt med mindst tre parceller pr. sort. Der kunne så registreres forholdsvis færre planter pr. parcel, således at der registreres det samme totale antal planter pr. sort (det er ikke undersøgt, om det totale antal planter pr. sort i så fald kan nedsættes). Dette vil næppe fordyre forsøgene væsentligt, da en meget stor del af udgifterne hidrører fra registreringsarbejdet.

For enkelte karakterer har man hidtil benyttet en forkert forsøgsenhed, idet man har undladt at notere, fra hvilken af de to parceller med samme sort en given registrering stammer. En sådan simuleret undladelse for de øvrige kontinuerte karakterer i 1976 og 1977 viste, sammenlignet med en analyse, hvor der blev taget hensyn hertil, at mange sortspar i så fald fejlagtig ville blive betragtet som forskellige.

5.1.2 Karakterantallets betydning

Ved den hidtil anvendte testmetode for selvstændighed er sandsynligheden for, at en sort bliver betragtet som selvstændig stærkt afhængig af det antal karakterer, der benyttes. Således bliver sandsynligheden herfor større jo flere karakterer, der er med i forsøget. Dette gælder også, selv om den nyanmeldte sort skulle være identisk med en af referencesorterne. I det enkelte forsøg kan denne sandsynlighed (for type I-fejl) blive meget stor. Virkningen heraf på den endelige afgørelse af om den nyanmeldte sort er selvstændig afbødes dog noget af, at forskellene skal være til stede i mere end et år.

For at kunne fastholde sandsynligheden for type I-fejlen (testniveauet) i det enkelte forsøg (og samlet) på en given størrelse, foreslås der ændrede testmetoder. Her er der undersøgt to metoder: 1) En univariate metode, som den nu benyttede, men med en korrektion for antal karakterer ved anvendelse af Bonferroni's ulighed. 2) En multivariate metode, der bygger på Hotellings T^2-test.

Ved teoretiske beregninger fandtes det, at af de to nævnte test havde den multivariate den største styrke, dersom forskellen mellem par af sorter er fordelt ligelig på alle karakterer. Derimod havde metoden, som anvender Bonferroni's ulighed, den største styrke, dersom forskellen mellem par af sorter er samlet i en enkelt karakter.

5.1.3 Referencesortsantallets betydning

Antal af referencesorter kan også have indflydelse på sandsynligheden for type I-fejlen, idet denne bliver mindre, såfremt der er mange referencesorter, som ligner den nyanmeldte sort meget. I modsætning til forholdene med antal karakterer synes det ikke muligt at foreslå nogle ændringer, som kan modvirke indflydelsen af referencesortsantallet. Dette er dog næppe så væsentligt her, da et stort antal referencesorter ikke kan øge sandsynligheden for type I-fejlen ud over den forud fastlagte værdi, men derimod kan formindske denne, således at sandsynligheden for type I-fejl bliver mindre (og sandsynlighed for type II-fejlen bliver større).

5.1.4 Sortsadskillelse

Ved benyttelse af datamateriale for kogeærter 1975-1977 syntes den univariate metode at have en lidt bedre teststyrke end den multivariate metode. Den multivariate test har imidlertid en meget dårlig teststyrke, hvis der er få frihedsgrader til bestemmelse af residualvariansen. Af denne grund vil en fordeling af de registrerede planter (50 pr. sort) på mere end to parceller være særlig værdifuld, hvis man ønsker at anvende de multivariate test.

For at undersøge om det er muligt at nøjes med et færre antal karakterer, end de her registrerede, blev et antal karaktersæt, på hver 8 eller 10 karakterer, undersøgt. Med det formål at teste, om de enkelte sorter er signifikant forskellige, synes det muligt at udpege et karaktersæt på 10 karakterer, der er tilnærmelsesvis lige så velegnede til at adskille de aktuelle sorter i 1976 og 1977, som alle karakterer.

5.1.5 Afstandsmål

Som afstandsmål er benyttet Mahalanobis afstand - eller simplificerede former heraf. Anvendes alle karakterer, synes der ikke at være forskel på, om man ved beregning tager delvis hensyn til korrelationen mellem karaktererne (summering af afstandsmål for hver af 6 karaktergrupper) eller blot summerer afstandsmålene for hver enkelt karakter. Begge disse afstandsmål - baseret på alle karakterer - synes velegnede til at afgøre, hvilken anden sort, en given sort ligner mest. De synes derimod usikre, såfremt man ønsker at undersøge, om et givet sortspar ligner hinanden mere end et andet sortspar.

Afstandsmål (hvor der blev taget hensyn til karakterenes indbyrdes korrelation) baseret på 7 karaktersæt (på hver 8 eller 10 karakterer) blev også prøvet. Disse var i ingen tilfæde så velegnede, som de to ovennævnte afstandsmål baseret på alle karakterer.

5.2 ENSARTETHEDSUNDERSØGELSER

5.2.1 Ensartethedsmål

I den opgørelsesmetode, som hidtil har været anvendt, har det været forudsat, at variationskoefficienten er et godt mål for ensartethed. Dette synes da også at være tilfældet for hovedparten (ca. $\frac{2}{3}$) af de undersøgte karakterer. For nogle af de øvrige karakterer er spredningen anvendelig. For en del andre karakterer har spredningen på en transformation af de oprindelig målte karakterer været uafhængige af middelværdien og derfor betragtet som anvendelige. For enkelte (5) karakterer har det ikke været muligt at finde et anvendeligt ensartethedsmål. I et tilfælde skyldtes dette, at karakteren var registreret i så grov en enhed, at spredningen af denne grund blev næsten helt afhængig af gennemsnittet. Tilsvarende gjaldt for et par antalsvariable, som normalt kun antog få (2-3) forskellige værdier.

5.2.2 Hidtil anvendt testmetode

I den hidtil anvendte testmetode har sandsynligheden for, at en sort bliver betragtet som ikke tilstrækkelig ensartet, været stærkt afhængig af såvel antal undersøgte karakterer som antal referencesorter. Som for den hidtil anvendte test for selvstændighed gælder, at nævnte sandsynlighed øges jo flere karakterer der undersøges, og jo mindre antallet af referencesorter er. I modsætning til forholdene ved selvstændighedstesten - hvor sandsynligheden for type I-fejlen kun kan blive større end forud fastlagt på grund af et stort antal karakterer - kan dette for den hidtil anvendte test for ensartethed også blive forårsaget alene af et lille antal referencesorter.

5.2.3 Foreslået testmetode

De gængse metoder (bl.a. F-test, Bartletts test) for sammenligning af varianser (og spredninger) forudsætter normalfordelte data, og er meget følsomme over for visse former for afvigelser herfra. Da flere af de anvendte karakterer (bl.a. antalsvariable og kvotienter) ikke kan antages at være normalfordelte, synes disse test ikke anvendelige. Det forslås i stedet, at testen baseres på logaritmetransformerede spredninger, idet det da synes muligt at anvende de sædvanlige test for sammenligning af gennemsnitstal.

En indledende undersøgelse viste, at forskellen mellem de enkelte sorters ensartethedsmål (spredninger, eller spredninger på transformerede tal - herunder variationskoefficienten) ikke alene kan tilskrives den tilfældige variation fra parcel til parcel. Metoder som forudsætter, at forskellene mellem referencesorterne kun skyldes den tilfældige variation mellem parcellerne, er derfor ikke anvendelige.

Logaritmerne af de enkelte sorters ensartethedsmål synes på tilfredsstillende vis at kunne beskrives ved en normalfordeling. Det foreslås derfor at benytte en t-test til at undersøge, om logaritmen af den nyanmeldte sorts ensartethedsmål kan tilhøre den samme normalfordeling som referencesorterne eller en anden normalfordeling med en større middelværdi. Sandsynligheden for type I-fejlen ved anvendelse af denne test vil være uafhængig af antal referencesorter.

Når der undersøges mange karakterer, kan sandsynligheden for type I-fejlen blive urimelig stor, såfremt der ikke tages hensyn hertil. Dette kan - som for selvstændighedstesten - undgås ved at benytte enten Bonferroni's ulighed eller et generelt ensartethedsmål (som inkluderer alle karakterer, der skal testes for ensartethed). Her er undersøgt to sådanne generelle ensartethedsmål: Den generaliserede varians samt det geometriske gennemsnit af karakterernes varianser (spredninger). Som for de enkelte karakterers ensartethedsmål synes logaritmerne af disse to generelle ensartethedsmål at kunne beskrives ved en normalfordeling, og testene derfor udføres som for en enkelt karakter (ved t-test). De to undersøgte generelle ensartethedsmål synes at være lige anvendelige.

6. LITTERATUR

Anderson, T.W. (1958): An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. John Wiley & Sons. 374 pp.

Andresen, E., Christensen, K., Jensen, P. Thode, Sørensen, P. & Venge, O. (1977): Husdyrgenetik III. DSR. Forlag, Den Kongelige Veterinær og Landbohøjskole, København, 87 pp.

Anon (1972a): Kommissionens direktiv af 14. april 1972 om fastsættelse af kendetegn og mindstekrav for afprøvning af landbrugsplantearternes sorter/stammer (72/180/EØF). De Europæiske Fællesskabers Tidende Nr. L108/8 d. 8.5.1972, 387-412.

Anon (1972b): Kommissionens direktiv af 14. april 1972 om fastsættelsen af kendetegn og mindstekrav for afprøvning af grønsagsarternes sorter/stammer (72/168/EØF). De Europæiske Fællesskabers Tidende Nr. L103/6 d. 2.5 1972. 348-365.

Anon (1974a): Bekendtgørelse om afprøvning og optagelse af sorter af kulturplanter på sortsliste. Landbrugsministeriets bekendtgørelse nr. 36 af 23. januar 1974.

Anon (1974b): General introduction to the guidelines for the examination of destinctness, homogeneity and stability of new varieties of plants. UPOV/TG/1/1.

Anon (1974c): Guidelines for the conduct of tests for destinctness, homogeneity and stability. Garden peas (Pisum sativum L.). UPOV/TG/7/1.

Anon (1977): The IMSL Library vol. 1 & 2. International Mathematical and Statistical Libraries, Inc. Sixth Edition.

Anscombe, F.J. & Tukey, J.W. (1963): The Examination and Analysis of Residuals. Technometrics 5, 141-160.

Arnold, H.J. (1964): Permutation support for multivariate techniques. Biometrika 51, 65-70.

Bliss, C.I. (1967): Statistics on Biology. Volume One. McGraw-Hill. 558 pp.

Box, G.E.P. (1953): Non-normality and Tests on Variances. Biometrika 40, 318-335.

Brown, K.M. (1969): A quadratically convergent Newton-like method based upon Gaussian elimination. SIAM Journal on Numerical Analysis 6 (4), 560-569.

Cacoullos, T. (1965a): Comparing Mahalanobis distances I. Comparing distances between k known normal populations and another unknown. Sankya, Serie A 27, 1-22.

Cacoullos, T. (1965b): Comparing Mahalanobis distances II. Bayes procedures when the mean vectors are unknown. Sankya, Serie A 27, 23-32.

Chase, G.R. & Bulgren, W.G. (1971): A Monto Carlo Investigation of the Robustness of T^2. Journal of the American Statistical Association 66, 499-502.

Christensen, J. Vittrup (1977): Personlig meddelelse.

Cochran, W.G. (1964): On the Performance of the Linear Discriminant Function. Technometrics 6, 179-190.

Cox, D.R. & Hinkley, D.V. (1974): Theoretical Statistics. Chapman and Hall, London, 511 pp.

Daniel, C. & Wood, F.S. (1971): Fitting Equations to Data. John Wiley and Sons. 342 pp.

Dempster, A.P. (1958): A high dimensional two-sample significance test. The Annals of Mathematical Statistics 29, 995-1010.

Dempster, A.P. (1960): A significance test for the separation of two highly multivariate small samples. Biometrics 16, 41-50.

Dempster, A.P. (1963): Stepwise multivariate analysis of variance based on principal variables. Biometrics 19, 478-490.

Dunn, O.J. & Massey, F.J. (1965): Estimation of multiple contrasts using t-distributions. Journal of the American Statistical Association 60, 573-583.

Everitt, B.S. (1979): A Monto Carlo Investigation of the Robustness of Hotellings One-and-Two-Sample T^2 Test. Journal of the American Statistical Association 74, 48-51.

Flengmark, P. (1977): Personlig meddelelse.

Gjeddebæk, N.F. (1949): Contribution to the Study of Grouped Observations. Application of the Method of Maximum Likelihood in case of Normally Distributed Observations. Skandinavisk Aktuarietidsskrift 32, 135-159.

Gnanadesikan, R. (1977): Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations. John Wiley and Sons. 311 pp.

Goodman, M.M. (1968a): The Races of Maize: II. Use of Multivariate Analysis of Variance to Measure Morphological Similarity. Crop Science 8, 693-698.

Goodman, M.M. (1968b): A Measure of 'Overall Variability' in Populations. Biometrics 24, 189-192.

Halperin, M. (1967): An inequality on a bivariate Student's "t" distribution. Journal of the American Statistical Association 62, 603-606.

Holloway, L.N. & Dunn, O.J. (1967): The Robustness of Hotellings T^2. Journal of the American Statistical Association 62, 124-136.

Hopkins, J.W. & Clay, P.P.F. (1963): Some Empirical Distributions of Bivariate T^2 and Homoscedasticity Criterion M under Unequal Variance and Leptokurtosis. Journal of the American Statistical Association 58, 1048-1053.

Hotelling, H. (1931): The generalization of Student's ratio. The Annals of Mathematical Statistics 2, 360-378.

Ito, K. & Schull, W.J. (1964): On the robustness of the T_0^2 test in multivariate analysis of variance when variance-covariance matrices are not equal. Biometrika 51, 71-82.

John, J.A. & Prescott, P. (1975): Critical Values of a Test to Detect Outliers in Factorial Experiments. Applied Statistics 24, 56-59.

John, J.A. & Draper, N.R. (1978): On testing for Two Outliers or One Outlier in Two-Way Tables. Technometrics. 20, 69-78.

Kendall, M. & Stuart, A. (1973): The Advanced Theory of Statistics. Vol. 2. Charles Griffin & Co. Ltd. 723 pp.

Kendall, M. & Stuart, A. (1977): The Advanced Theory of Statistics. Vol. 1. Charles Griffin & Co. Ltd. 472 pp.

Lachenbruch, P.A. (1968): On expected probabilities of misclassification in discriminant analysis, necessary sample size, and a relation with the multiple correlation coefficient. Biometrics 24, 823-834.

Lilliefors, H.W. (1967): On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown. Journal of the American Statistical Assocation. 62, 399-402.

Malkovich, J.F. & Afifi, A.A. (1973): On test for Multivariate Normality. Journal of the American Statistical Association 68, 176-179.

Mardia, K.V. (1971): The effect of non-normality on some multivariate tests and robustness to non-normality in the linear model. Biometrika 58, 105-121.

McHenry, C.E. (1978): Computing of a Best Subset in Multivariate Analysis. Applied Statistics 27, 291-296.

Morrison, D.F. (1976): Multivariate Statistical Methods. Second Edition. McGraw-Hill. 415 pp.

Patnaik, P.B. (1949): The Noncentral χ^2- and F-Distributions and their Applications. Biometrika 36, 202-232.

Pearson, E.S. & Hartley, H.O. (1972): Biometric Tables for Statisticians. Volume 2. Cambridge University Press. 385 pp.

Pearson, E.S. & Hartley, H.O. (1976): Biometric Tables for Statisticians. Volume 1. Cambridge University Press. 270 pp.

Press, S.J. (1972): Applied Multivariate Analysis. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 521 pp.

Rao, C.R.(1958): Bengal Anthropometric Survey, 1945: A Statistical Study. Sankhya 19, 201-408.

Rao, C.R. (1962): Use of Discriminant and Allied Functions in Multivariate Analysis. Sankhya Serie A. 24, 149-154.

Rao, C.R. (1973): Linear Statistical Inference and Its Applications. Second Edition. John Wiley & Sons. 625 pp.

Roy, J. (1958): Step-down procedure in multivariate analysis. The Annals of Mathematical Statistics. 29, 1177-1187.

Rudemo, M. (1979): Statistik og sandsynlighedslære: Med biologisk anvendelse. Del 1. Grundbegreber. DSR Forlag. Den kgl. Veterinær- og Landbohøjskole, København. 251 pp.

Seal, H.L. (1964): Multivariate Statistical Analysis for Biologists. Methuen and Co. Ltd. 207 pp.

Searle, S.R. (1966): Matrix Algebra for the Biological Sciences John Wiley & Sons. 296 pp.

Scheffé, H. (1959): The Analysis of Variance. John Wiley & Sons. 477 pp.

Šidák, Z. (1971): On the probabilities of Rectangles in Multivariate Student Distributions: Their Dependence on Correlations. The Annals of Mathematical Statistics. 42, 169-175.

Snedecor, G.W. & Cochran, W.G. (1967): Statistical Methods, 6th Edition. The Iowa State University Press. 593 pp.

Sneath, P.H.A. & Sokal, R.R. (1973): Numerical Taxonomy. W.H. Freeman and Co. 573 pp.

Srivastava, M.S. (1967): Comparing distances between multivariate populations - the problem of minimum distance. The Annals of Mathematical Statistics 38, 550-556.

APPENDIX A

<u>Beregning af sandsynligheden for at en nyanmeldt sort bliver betragtet som selvstændig ved anvendelse af en enkelt karakter i et enkelt forsøg (afsnit 2.1.1.1).</u>

Kender vi forsøgets størrelse (parametrene n, m og k_0) samt sorternes (nyanmeldt sorts og referencesorters) middelværdi og varians (parametrene μ_0, μ_1, μ_2, ..., μ_{k_0} og σ^2), kan vi beregne sandsynligheden for at den nyanmeldte sort bliver betragtet som forskellig fra alle referencesorter ved anvendelse af en enkelt karakter i et enkelt år. Kalder vi denne sandsynlighed for α_1, får vi:

$$\alpha_1 = P\left(\bigcap_{i=1}^{k_0} \{|\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{0.}| > LSD_{1-\alpha}\} \right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{k_0} \{|\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{0.}| \,/\, (s\sqrt{\tfrac{2}{n}}) > t_{1-\alpha/2,m}\} \right)$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{k_0} \{|\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{0.}| \,/\, [(\sigma\sqrt{\tfrac{1}{n}})(\tfrac{s}{\sigma})] > \sqrt{2}\, t_{1-\alpha/2,m}\} \right)$$

Indfører vi her: $(\bar{X}_{i.}-\bar{X}_{0.})/(\sigma\sqrt{\frac{1}{n}}) = Z_i-Z_0$, hvor $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{k_0}$ er uafhængige og normalfordelte med samme varians $VAR(Z_i) = 1$ og forventningerne: $E(Z_0) = 0$, $E(Z_i) \underset{s}{=} \Delta_i = (\mu_i-\mu_0)\sqrt{n}/\sigma$, $i = 1,2,\ldots,k_0$, $c = \sqrt{2}\, t_{1-\alpha/2,m}$ samt $S = \frac{s}{\sigma}$, kan vi skrive:

$$\alpha_1 = P\left(\bigcap_{i=1}^{k_0} \{|Z_i-Z_0| \,/\, S > c\} \right)$$

$$= \int_0^\infty P\left(\bigcap_{i=1}^{k_0} \{|Z_i-Z_0| > s\cdot c\} \right) f_S(s)ds$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P\left(\bigcap_{i=1}^{k_0} \{|Z_i-z| > s\cdot c\} \right) f_{Z_0}(z)dz\, f_S(s)ds$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P\left(\bigcap_{i=1}^{k_0} \{Z_i - \Delta_i \notin [-sc+z-\Delta_i, sc+z-\Delta_i]\}\right) f_{Z_0}(z)dz\ f_S(s)ds$$

$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \prod_{i=1}^{k_0} [1-(\Phi(sc+z-\Delta_i) - \Phi(-sc+z-\Delta_i))] f_{Z_0}(z) f_S(s)dzds$$

$$= \sqrt{\tfrac{2}{\pi}} \cdot \left(\tfrac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} / \Gamma\left(\tfrac{m}{2}\right) \int_0^\infty s^{m-1} \exp(-\tfrac{1}{2}s^2 m) \int_{-\infty}^\infty \exp(-\tfrac{1}{2}z^2) \prod_{i=1}^{k_0} [1-\Phi(sc+z-\Delta_i)$$

$$+ \Phi(-sc+z-\Delta_i)]dzds \quad ,$$

hvor

$f_{Z_0}(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)$ er tætheden af Z_0 i punkt z

$f_S(s) = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{2}{\sqrt{\Gamma(\frac{m}{2})}} s^{m-1} \exp(-\frac{1}{2}s^2 m)$ er tætheden af S i punktet s

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)dz = \int_{-\infty}^x f_{Z_0}(z)dz$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ er gammafunktionen.

En tilsvarende beregningsmetode er benyttet af Dunn og Massey (1965) til at finde $P(\max_{i=1,2,\ldots,k_0} |t_i| > u)$, hvor $t_i = X_i/s$, $X = [X_1, X_2, \ldots, X_{k_0}]'$ følger en multivariate normalfordeling

$$N\left(0, \begin{bmatrix} \sigma^2 & \tau & \cdots & \tau \\ \tau & \sigma^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tau & \tau & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}\right) .$$

I tabel 2.1.1 side 11 er α_1 vist for $k_0=3$, $\Delta_1=0$; $\Delta=\Delta_3=-\Delta_2=0,1,\ldots,10$; $\alpha = 0.05$ og 0.01 samt $m = 20$ og ∞;

<u>Beregning af sandsynligheden for at to sorter bliver betragtet som forskellige ved anvendelse af $LSD_{1-\alpha}$ for en række karakterer i et enkelt forsøg (afsnit 2.1.1.2).</u>

Betegner vi sandsynligheden for at to sorter bliver betragtet som forskellige i et enkelt forsøg for α_2, får vi ved anvendelse af $LSD_{1-\alpha}$:

$$\alpha_2 = P(\bigcup_{\ell=1}^{p} \{|\bar{X}_{1.}^{\ell} - \bar{X}_{0.}^{\ell}| \geq LSD_{1-\alpha}^{\ell}\})$$

$$= 1 - P(\bigcap_{\ell=1}^{p} \{|\bar{X}_{1.}^{\ell} - \bar{X}_{0.}^{\ell}| < LSD_{1-\alpha}^{\ell}\})$$

hvor $\bar{X}_{0.}^{\ell}$ = gennemsnit af karakter ℓ for en nyanmeldt sort

$\bar{X}_{1.}^{\ell}$ = gennemsnit af karakter ℓ for en referencesort

$LSD_{1-\alpha}^{\ell} = \sqrt{\frac{2}{n}}\, s^{\ell} \cdot t_{1-\alpha/2,m}$

s^{ℓ} = standardafvigelse for karakter ℓ

m = antal frihedsgrader ved estimering af s^{ℓ}

n = antal blokke

$t_{1-\alpha/2,m}$ = $(1-\alpha/2)$-fraktilen i Student's t-fordeling med m frihedsgrader

p = antal karakterer.

Hvis alle karaktererne kan antages at være uafhængige, og de to sorter er identiske, kan vi beregne α_2 eksakt, idet vi da har:

$$P(\bigcap_{\ell=1}^{p} \{|\bar{X}_{1.}^{\ell} - \bar{X}_{0.}^{\ell}| < LSD_{1-\alpha}^{\ell}\}) = \prod_{\ell=1}^{p} P(|\bar{X}_{1.}^{\ell} - \bar{X}_{0.}^{\ell}| < LSD_{1-\alpha}^{\ell})$$

$$= (1-\alpha)^{p}$$

og vi får da:

$$\alpha_2 = 1-(1-\alpha)^p \qquad (A.1)$$

For $p > 1$ bliver type I-fejlen således større end den tilstræbte værdi α (tabel 2.1.2).

Kan karaktererne ikke antages at være uafhængige, gælder ovenstående beregninger ikke generelt. For $p = 2$ kan de ovenfor beregnede type I-fejl (α_2) betragtes som en øvre grænse, idet Halperin (1967) har vist, at hvis $Y = [Y_1, Y_2]'$ følger en todimensional normalfordeling med forventning $EY = [0,0]'$ og vilkårlig variansmatrix, Σ, så gælder:

$$P(|T_1| < c_1 \cap |T_2| < c_2) \geq P(|T_1| < c_1)\, P(|T_2| < c_2)$$

hvor $T_1 = \sqrt{n}\, \bar{Y}_{1.}/s_1$, $T_2 = \sqrt{n}\, \bar{Y}_{2.}/s_2$, og hvor s_1^2 og s_2^2 er uafhængige af $\bar{Y}_{1.}$ og $\bar{Y}_{2.}$ og er centrale estimater for henholdsvis $Var(Y_1)$ og $Var(Y_2)$. Heraf fås:

$$P(|T_1| > c_1 \cup |T_2| > c_2) \leq 1-P(|T_1| < c_1)\, P(|T_2| < c_2)$$

Sættes $c_1 = c_2 = t_{1-\alpha/2,m}$ får vi, at venstre siden er den søgte sandsynlighed, α_2, og vi får da:

$$\alpha_2 \leq 1-(1-\alpha)^2 \ . \qquad (A.2)$$

For vilkårligt antal karakterer er den tilsvarende ulighed kun vist under forudsætning af en speciel korrelationsmatrix (Šidák, 1971).

En øvre grænse kan imidlertid beregnes ved hjælp af Bonferronis ulighed, som giver:

$$\alpha_2 = P\left(\bigcup_{\ell=1}^{p} \{|\bar{X}_{1.}^{\ell} - \bar{X}_{0.}^{\ell}| > LSD_{1-\alpha}^{\ell}\}\right) \qquad (A.3)$$

$$\leq \sum_{\ell=1}^{p} P(\{|\bar{X}_{1.}^{\ell} - \bar{X}_{0.}^{\ell}| > LSD_{1-\alpha}^{\ell}\})$$

$$= p\,\alpha \ .$$

Beregning af hvilke fraktilværdier, der skal benyttes, for at sikre at testniveauet er højst α ved en enkelt sortssammenligning i et enkelt forsøg (afsnit 2.1.1.2).

For uafhængige karakterer kan vi sikre os, at type I-fejlen er højst α, hvis vi i stedet for at benytte $t_{1-\alpha/2,m}$ ved beregning af LSD-værdien benytter $t_{1-\alpha^*/2,m}$, hvor $\alpha^* = 1-(1-\alpha)^{1/p}$, thi vi får da:

$$\alpha_2 = 1-(1-\alpha^*)^p = 1-(1-(1-(1-\alpha)^{1/p}))^p = \alpha ,$$

jvf. formel (A.1).

Er karaktererne ikke uafhængige, kan vi på lignende vis benytte $t_{1-\alpha^*/2,m}$ ved beregning af LSD-værdien, men α^* er nu givet ved:

$$\alpha^* = \begin{cases} 1-\sqrt{1-\alpha} & \text{for } p = 2 \\ \alpha/p & \text{for } p \geq 3 \end{cases}$$

og vi får da ved benyttelse af (A.2) henholdsvis (A.3) at $\alpha_2 \leq \alpha$.

Foruden ovennævnte øvre grænser for type I-fejlen kan man beregne et andet sæt øvre grænser ved hjælp af simultane konfidensgrænser for linearkombinationer af variable i en flerdimensional normalfordeling (Hotellings T^2-test). Disse grænser vil imidlertid oftest give grænser, som er videre end de, der ovenfor er beregnet ved Bonferronis ulighed. Kun hvis der benyttes mange beregnede karakterer (som linearkombinationer af de registrerede karakterer), er det muligt at få lidt snævrere grænser ved den sidstnævnte metode.

<u>Beregning af det antal karakterer for hvilke man skal forlange at $|\bar{X}_1^\ell - \bar{X}_0^\ell| > LSD_{1-\alpha}$ for at sikre, at type I-fejlen er højst α ved en enkelt sortssammenligning i et enkelt forsøg (afsnit 2.1.1.2).</u>

Vi antager, at karaktererne kan betragtes som indbyrdes uafhængige. Vi indfører nu p nye variable A^ℓ ($\ell=1,2,\ldots,p$), og sætter

$$A^\ell = \begin{cases} 0 & \text{hvis } |\bar{X}_{1.}^\ell - \bar{X}_{0.}^\ell| \leq LSD_{1-\alpha}^\ell \\ 1 & \text{hvis } |\bar{X}_{1.}^\ell - \bar{X}_{0.}^\ell| > LSD_{1-\alpha}^\ell \end{cases}$$

Er de to sorter identiske, vil A^ℓ være binomialfordelt $Bi(1,\alpha)$. Det antal karakterer, A, for hvilke $|\bar{X}_{1.}^\ell - \bar{X}_{0.}^\ell| > LSD_{1-\alpha}^\ell$, vil da være givet ved:

$$A = \sum_{\ell=1}^{p} A^\ell$$

A vil da være binomialfordelt $Bi(p,\alpha)$, og vi får:

$$P(A \geq a) = \sum_{\ell=a}^{p} \binom{p}{\ell} \alpha^\ell (1-\alpha)^{p-\ell}$$

Vi kan nu bestemme a således at $P(A \geq a) \leq \alpha$.

Betragtes de to sorter kun som forskellige, hvis $A \geq a$, vil type I-fejlen være højst α. I tabel 2.1.2 side 13 er a beregnet for $\alpha = 0.01$ og 0.05 samt $p = 1,2,3,4,6,8,10,15,20,25,30,50$ og 100.

Beregning af sandsynligheden for at et sortspar i en b-årig afprøvning med en karakter bliver betragtet som forskellig (afsnit 2.1.2).

For at et sortspar bliver betragtet som forskellig, skal følgende være opfyldt for mindst en af karaktererne

1) $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| > LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i et år

2) $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| > LSD^{\ell}_{1-\gamma}$ i et af de øvrige år

3) $\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}$ har samme fortegn i alle år.

Kaldes disse tre hændelser for henholdsvis A^{ℓ}_{1}, A^{ℓ}_{2} og A^{ℓ}_{3} samt hændelsen at det givne sortspar bliver betragtet som forskellig for karakter ℓ for A^{ℓ}_{01}, har vi:

$$A^{\ell}_{01} = A^{\ell}_{1} \cap A^{\ell}_{2} \cap A^{\ell}_{3}$$

I stedet for at betragte de tilfælde, hvor punkt 1) og 2) er opfyldt, kan vi i stedet betragte de tilfælde, hvor de ikke begge er opfyldt. Vi indfører derfor hændelserne:

B^{ℓ}_{1} : $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| \leq LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i alle år

B^{ℓ}_{1} : $|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| > LSD^{\ell}_{1-\alpha}$ i præcist et år og

$|\bar{X}^{\ell}_{1.} - \bar{X}^{\ell}_{0.}| \leq LSD^{\ell}_{1-\gamma}$ i alle øvrige år.

Vi får da:

$$A^{\ell}_{1} \cap A^{\ell}_{2} = \complement (B^{\ell}_{1} \cup B^{\ell}_{2})$$

Hvis de to sorter er identiske, får vi følgende sandsynligheder:

$$P(\beta_1^\ell) = (1-\alpha)^b$$

$$P(\beta_2^\ell) = b\alpha(1-\gamma)^{b-1}$$

$$P(A_3^\ell) = (\tfrac{1}{2})^{b-1}$$

Da β_1^ℓ og β_2^ℓ er disjunkte hændelser, har vi:

$$P(A_1^\ell \cap A_2^\ell) = 1-P(\beta_1^\ell) - P(\beta_2^\ell) = 1-(1-\alpha)^b-b\alpha(1-\gamma)^{b-1} .$$

Udnytter vi, at en numerisk differens er uafhængig af differensens fortegn, får vi:

$$P(A_{01}^\ell) = [1-(1-\alpha)^b-b\alpha(1-\gamma)^{b-1}](\tfrac{1}{2})^{b-1} . \qquad (A.4)$$

Beregning af sandsynligheden for at en nyanmeldt sort bliver betragtet som selvstændig (afsnit 2.1.2).

Kalder vi hændelsen at en nyanmeldt sort, nr. 0, bliver betragtet som selvstændig for A_0, kan vi skrive:

$$A_0 = \bigcap_{i=1}^{k_0} (\bigcup_{\ell=1}^{p} A_{0i}^{\ell}) ,$$

hvor A_{0i}^{ℓ} betegner hændelsen, at den nyanmeldte sort bliver betragtet som forskellig fra referencesort i på karakter ℓ.

Fra sandsynlighedsregningen har vi:

$$P(\bigcap_{i=1}^{k_0} A_i) \leq \min_{i=1,2,\ldots,k_0} P(A_i).$$

Vi får da:

$$P(A_0) = P(\bigcap_{i=1}^{k_0} (\bigcup_{\ell=1}^{p} A_{0i}^{\ell})) \leq \min_{i=1,2,\ldots,k_0} P(\bigcup_{\ell=1}^{p} A_{0i}^{\ell}) .$$

Er den nyanmeldte sort identisk med en af referencesorterne, har vi:

$$\min_{i=1,2,\ldots,k_0} P(\bigcup_{\ell=1}^{p} A_{0i}^{\ell}) = \alpha_3 ,$$

hvor α_3 er sandsynligheden for at den nyanmeldte sort bliver betragtet som forskellig fra den referencesort, den er identisk med (se side 16-17).

<u>Beregning af forventning og varians for $D^2_{i,i'}$ samt et centralt estimat for $\delta^2_{i,i'}$ (afsnit 2.3.1).</u>

Da $D^2_{i,i'}$ kan transformeres til en ikke-central F-variabel (Rao 1973), (jvf. også (2.3.3)), får vi:

$$E(D^2_{i,i'}) = \frac{c\ m\ p}{(m-p+1)}\ E\ (F_{i,i'}) = \frac{m}{m-p-1}\ (\delta^2_{i,i'} + cp)$$

$$Var(D^2_{i,i'}) = (\frac{c\ m\ p}{m-p-1})^2\ Var(F_{i,i'}) \qquad (A.5)$$

$$= \frac{2\ m^2}{(m-p-3)(m-p-1)^2}[\delta^4_{i,i'}+2c(m-1)\delta^2_{i,i'}+c^2p(m-1)]$$

hvor $F_{i,i'}$ er ikke-central F-fordelt $(p, m-p+1, c^{-1}\ \delta^2_{i,i'})$.

$$E(F_{i,i'}) = (p+c^{-1}\delta^2_{i,i'})\frac{1}{p}\cdot\frac{m-p+1}{m-p-1} \quad \text{(Patnaik, 1949)}$$

$$Var(F_{i,i'}) = \frac{2(m-p+1)^2[(m-1)(p+2c^{-1}\delta^2_{i,i'})+(c^{-1}\delta^2_{i,i'})^2]}{p^2(m-p-1)^2(m-p-3)}$$

(Patnaik, 1949)

$$c = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}$$

n_i = antal gentagelser af sort i.

Som et centralt estimat for $\delta^2_{i,i'}$, kan vi benytte:

$$\tilde{\delta}^2_{i,i'} = \frac{m-p-1}{m}\ D^2_{i,i'}-cp \quad , \qquad (A.6)$$

thi ved benyttelse af ovenstående udtryk for $E(D^2_{i,i'})$ får vi:

$$E(\tilde{\delta}^2_{i,i'}) = \frac{m-p-1}{m}\ [\frac{m}{m-p-1}(\delta^2_{i,i'} + cp)]-cp = \delta^2_{i,i'}$$

Dette estimat, $\tilde{\delta}^2_{i,i'}$, er ligeledes foreslået som anvendeligt ved beregning af sandsynligheder for fejlklassificering i diskriminantanalyse (Lachenbruck, 1968).

Variansen på det centrale estimat er givet ved:

$$\mathrm{Var}(\tilde{\delta}^2_{i,i'}) = [\frac{m-p-1}{m} \cdot \frac{c\ m\ p}{(m-p+1)}]^2\ \mathrm{Var}(F_{i,i'}) \qquad (A.7)$$

$$= \frac{2}{m-p-3}[\delta^4_{i,i'} + 2c(m-1)\ \delta^2_{i,i'} + c^2 p(m-1)]\ .$$

Beregning af variansen på $\ln(D^2_{i,i'})$ (afsnit 2.3.1).

Sætter vi $Z_{i,i'} = \ln(D^2_{i,i'})$, får vi at variansen på $Z_{i,i'}$ approximativt er givet ved:

$$\mathrm{Var}(Z_{i,i'}) \approx \left(\frac{1}{E(D^2_{i,i'})}\right)^2 \mathrm{Var}(D^2_{i,i'}) \qquad (A.8)$$

$$= \left[\frac{m}{m-p-1}(\delta^2_{i,i'}+cp)\right]^{-2} \frac{2m^2}{(m-p-3)(m-p-1)^2} \left[\delta^4_{i,i'}+2c(m-1)\delta^2_{i,i'}+ c^2p\,(m-1)\right]$$

$$= \frac{2}{m-p-3}\;\frac{\delta^4_{i,i'} + 2c(m-1)\,\delta^2_{i,i'} + c^2p(m-1)}{\delta^4_{i,i'} + 2cp\delta^2_{i,i'} + c^2p^2}$$

Her er $E(D^2_{i,i'})$ og $\mathrm{Var}(D^2_{i,i'})$ givet ved (A.5) side A10).

Beregning af grænser for teststyrken i et enkelt forsøg (afsnit 2.3.2).

Vi kalder sandsynligheden for at forkaste nulhypoteserne $H_{0i,i'}$ og H_{0i} for henholdsvis $\beta_{i,i'}$ og β_i .

Vi har (Morrison, 1976, p 160):

$$\beta_{i,i'} = P(F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1})$$

hvor $F_{i,i'}$ er ikke-central F-fordelt $(p,m-p+1,\lambda_{i,i'})$, $\lambda_{i,i'} = \frac{n}{2}\delta^2_{i,i'}$ og $\delta_{i,i'}$ er Mahalanobis afstand mellem sort i og sort i'.

Da vi forkaster H_{0i}, hvis alle $F_{i,i'}$ $(i' = 1,2,\ldots,k_i)$, får vi at teststyrken for H_{0i} er givet ved

$$\beta_i = P(\bigcap_{i'=1}^{k_i} \{F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1}\}) \tag{A.9}$$

Fra sandsynlighedsregningen har vi, at $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_a) \leq \min_{h=1,2,\ldots,a} P(A_h)$, hvorfor vi får, at

$$\beta_i \leq \min_{i'=1,2,\ldots,k_i} P(F_{i,i'} > F_{1-\alpha,p,m-p+1})$$

$$= P(F_{i,i_0} > F_{1-\alpha,p,m-p+1}) = \beta_{i,i_0}$$

hvor i_0 er den sort, for hvilken $\delta^2_{i,i_0} = \min_{i'=1,2,\ldots,k_i} \delta^2_{i,i'}$.

β_{i,i_0} er altså en øvre grænse for β_i. En nedre grænse kan beregnes, idet vi ved hjælp af sandsynlighedsregningen får:

$$\beta_i = P(\bigcap_{i'=1}^{k_i} F_{i,i'} \geq F_{1-\alpha,p,m-p+1})$$

$$= 1 - P\left(\bigcup_{i'=1}^{k_i} F_{i,i'} < F_{1-\alpha,p,m-p+1}\right)$$

$$\geq 1 - \sum_{i'=1}^{k_i} P(F_{i,i'} < F_{1-\alpha,p,m-p+1})$$

$$= 1 - \sum_{i'=1}^{k_i} (1-\beta_{i,i'})$$

$$= \sum_{i'=1}^{k_i} \beta_{i,i'} - (k_i-1)$$

$$\geq k_i\left(\min_{i'=1,2,\ldots,k_i} \beta_{i,i'}\right) - (k_i-1)$$

$$= k_i\ \beta_{i,i_0} - (k_i-1)$$

Sammensættes ovenstående uligheder, får vi:

$$k_i\beta_{i,i_0} - (k_i-1) \leq \sum_{i'=1}^{k_i} \beta_{i,i'} - (k_i-1) \leq \beta_i \leq \beta_{i,i_0} \qquad \text{(A.10)}$$

<u>Beregning af testniveauet ved anvendelse af flere multivariate test (afsnit 2.3.5).</u>

Sandsynligheden for at $H_{0i,i'}$ forkastes ved anvendelse af (2.3.19) er givet ved:

$$P = P(\bigcup_{s=1}^{q} \{F_{i,i'}^{s} > F_{1-\alpha_s, p_s, m-p_s+1}\}) .$$

Er de enkelte test uafhængige, har vi:

$$P = P(\bigcup_{s=1}^{q} \{F_{i,i'}^{s} > F_{1-\alpha_s, p_s, m-p_s+1}\})$$

$$= 1 - P(\bigcap_{s=1}^{q} \{F_{i,i'}^{s} < F_{1-\alpha_s, p_s, m-p_s+1}\})$$

$$= 1 - \prod_{s=1}^{q} P(F_{i,i'}^{s} < F_{1-\alpha_s, p_s, m-p_s+1}) .$$

Vælger vi $\alpha_s = 1-(1-\alpha)^{p_s/p}$, har vi under $H_{0i,i'}$:

$$P = 1 - \prod_{s=1}^{q} P(F_{i,i'}^{s} < F_{1-\alpha_s, p_s, m-p_s+1})$$

$$= 1 - \prod_{s=1}^{q} (1-\alpha_s)$$

$$= 1 - (1-\alpha)^{\sum_{s=1}^{q} p_s/p}$$

$$= \alpha .$$

Er de enkelte test ikke uafhængige, kan vi ikke beregne et eksakt udtryk for testniveauet men alene en øvre grænse. Vi får da ved Bonferronis ulighed:

$$P\left(\bigcup_{s=1}^{q}\{F^{s}_{i,i'} > F_{1-\alpha_s,p_s,m-p_s+1}\}\right) \leq \sum_{s=1}^{q} P(F^{s}_{i,i'} > F_{1-\alpha_s,p_s,m-p_s+1})$$

Vælger vi α_s således at $\sum_{s=1}^{q} \alpha_s = \alpha$, får vi under H_0:

$$P \leq \sum_{s=1}^{q} P(F^{s}_{i,i'} > F_{1-\alpha_s,p_s,m-p_s} + 1)$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \alpha_s = \alpha \; .$$

Beregning af variansen på logaritmen af estimat for den generaliserede varians (afsnit 3.4.1).

For store stikprøver gælder (Anderson, 1958 p 173):

$$\sqrt{f}\ (|S|/|\Sigma|-1) \sim N(0,2p)$$

hvor Σ = populationens kovariansmatrix

S = estimat for Σ

f = antal frihedsgrader ved beregning af S.

Heraf fås:

$$E(|S|) = |\Sigma|$$
$$Var(|S|) = 2p\ |\Sigma|^2\ /\ f$$

Sætter vi $Y = \ln(|S|)$, får vi (Rudemo, 1979 p 100-101):

$$Var(Y) \approx 2p|\Sigma|^2/f/|\Sigma|^2 = \frac{2p}{f}\ . \qquad (A.11)$$

Beregning af variansen på summen af p uafhængige logaritmerede varianser (afsnit 3.4.1).

Sætter vi $Y^{\ell} = \ln((s^{\ell})^2)$, hvor s^{ℓ} er standardafvigelsen for karakter ℓ, er variansen på Y^{ℓ} approximativt givet ved (Scheffé, 1959):

$$\mathrm{Var}(Y\ ) \approx \frac{2}{f} + \frac{\gamma}{n_s} \approx \frac{2+\gamma^{\ell}}{f}$$

hvor γ^{ℓ} = kurtosis for karakter ℓ

f = antal frihedsgrader ved bestemmelse af s^{ℓ}

n_s = antal observationer ved bestemmelse af s^{ℓ}.

Sætter vi $Y = \sum_{\ell=1}^{p} Y^{\ell}$, får vi for uafhængige karakterer:

$$\mathrm{Var}(Y) \approx \sum_{\ell=1}^{p} \left(\frac{2+\gamma^{\ell}}{f}\right) = \frac{2p}{f} + \frac{1}{f}\sum_{\ell=1}^{p} \gamma^{\ell} \qquad \text{(A.12)}$$

Beregning af den systematiske fejl ved afrunding af karakterer (afsnit 4.2.1.2).

Antager vi, at X_h er normalfordelt $N(\mu,\sigma^2)$, og at X_h registreres i hele enheder, som anført i (4.2.1), bliver sandsynligheden for, at registreringen antager en given værdi:

$$P(N_h = a) = P(a - 0.5 \leq X_h \leq a + 0.5)$$

$$= \Phi(\frac{a+0.5-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-0.5-\mu}{\sigma})$$

$$\text{hvor } \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx .$$

Den forventede værdi af den registrerede variabel bliver:

$$E(N_h) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} aP(N_h=a) \qquad (A.13)$$

$$= \sum_{a=-\infty}^{\infty} a \left[\Phi(\frac{a+0.5-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-0.5-\mu}{\sigma})\right]$$

$$\approx \sum_{a=a_1}^{a_2} a \left[\Phi(\frac{a+0.5-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-0.5-\mu}{\sigma})\right]$$

hvor $a_1 \leq \mu - 5\sigma$

$a_2 \geq \mu + 5\sigma$

Denne værdi skal sammenlignes med den forventede værdi af den uafrundede variabel:

$$E(X_h) = \mu ,$$

og vi får da den systematiske fejl:

$$\Delta = \mu - E(N_h) \qquad (A.14)$$

I tabel 4.2.1 side 71 er Δ vist for nogle kombinationer af σ og μ - ent(μ).

Beregning af Maximum Likelihood estimater for parametrene i model (4.2.1) og disses variansmatrix

For modellen i (4.2.2) fås likelihood-funktionen:

$$L = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n} \prod_{h=1}^{r} [\Phi(\frac{N_{ijh} + 0.5-\mu_{ij}}{\sigma}) - \Phi(\frac{N_{ijh}-0.5-\mu_{ij}}{\sigma})] \qquad (A.15)$$

Logaritmen heraf er

$$\ln L = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \ln[\Phi(\frac{N_{ijh} + 0.5-\mu_{ij}}{\sigma}) - \Phi(\frac{N_{ijh}-0.5-\mu_{ij}}{\sigma})] \qquad (A.16)$$

Differentierer vi partielt med hensyn til μ_{ij} ($i = 1,2,\ldots,k$; $j = 1,2,\ldots,n$) og σ samt sætter disse lig nul, får vi ligningerne:

$$\sum_{h=1}^{r} \frac{\phi(Z_{ijh})-\phi(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh})-\Phi(Y_{ijh})} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,k; \; j = 1,2,\ldots,n \qquad (A.17)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \frac{\phi'(Z_{ijh})-\phi'(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh})-\Phi(Y_{ijh})} = 0 \qquad (A.18)$$

hvor $Z_{ijh} = \dfrac{N_{ijh} + 0.5 - \mu_{ij}}{\sigma}$

$$Y_{ijh} = \frac{N_{ijh} - 0.5 - \mu_{ij}}{\sigma}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\phi'(x) = \frac{d\,\phi(x)}{d\,x} = -x\phi(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Løses dette ikke-lineære ligningssystem, får vi maksimum likelihood estimaterne.

Variansmatricen for estimaterne $\theta^* = [\mu^*_{11}, \mu^*_{21}, \ldots, \mu^*_{kn}, \sigma^*]'$ er for store stikprøver givet ved (Kendall & Stuart, 1973):

$$V = [-\ E(H)]^{-1}$$

hvor
$$H = \frac{d^2}{d\theta^2} \ln L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2_{11}} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{11} \partial \mu_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{11} \mu_{kn}} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{11} \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{12} \partial \mu_{11}} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2_{12}} & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{12} \partial \mu_{kn}} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{12} \partial \sigma} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma \partial \mu_{11}} & \cdots & & \cdots & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix}$$

er matricen af 2. ordens partielle differentialkvotienter

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{ij}\ \partial \mu_{i'j'}} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{h=1}^{r} \left[\frac{\phi'(Z_{ijh}) - \phi'(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh}) - \Phi(Y_{ijh})} - \left(\frac{\phi(Z_{ijh}) - \phi(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh}) - \Phi(Y_{ijh})}\right)^2\right], \\ i = i',\ j = j' \\ 0, \quad \text{ellers} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu_{ij}\ \partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{h=1}^{r} \left[-\frac{\phi''(Z_{ijh}) - \phi''(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh}) - \Phi(Y_{ijh})} + \frac{(\phi(Z_{ijh}) - \phi(Y_{ijh}))(\phi'(Z_{ijh}) - \phi'(Y_{ijh}))}{(\Phi(Z_{ijh}) - \Phi(Y_{ijh}))^2}\right.$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{r} \left[\frac{\phi'''(Z_{ijh}) - \phi'''(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh}) - \Phi(Y_{ijh})} - \left(\frac{\phi'(Z_{ijh}) - \phi'(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh}) - \Phi(Y_{ijh})}\right)^2 + \frac{\phi'(Z_{ijh}) - \phi'(Y_{ijh})}{\Phi(Z_{ijh}) - \Phi(Y_{ijh})}\right]$$

$$\phi''(x) = (x^2 - 1)\phi(x)$$
$$\phi'''(x) = (3x - x^3)\phi(x)$$

I stedet for at beregne E(H) er variansmatricen for estimaterne , θ^*, her approximeret ved:

$$V \approx [H_{\theta^*}]^{-1} \quad (A.19)$$

hvor H_{θ^*} er H udregnet for $\theta = \theta^*$. Dette udtryk er benyttet her som en approximation, selv om det kun er korrekt, når der findes et sæt af kn+1 sufficiente statistics for de her kn+1 parametre (Kendall & Stuart, 1973).

Til løsning af det ikke-lineære ligningssystem i (A.17) og (A.-18) er anvendt subroutinen ZSYSTM (Anon, 1977), der benytter Browns metode (Brown, 1969). Som et indledende estimat er anvendt $\bar{X}_{ij}$ for μ_{ij} og $s = \sqrt{\hat{\sigma}^2 - 0.10}$ for $\hat{\sigma}$, hvor $\hat{\sigma}^2$ er estimatet for σ^2 fra en almindelig variansanalyse på de registrerede tal. Korrektionen svarer ca. til Sheppards korrektion for grupperede tal. På baggrund af løsningerne til (A.17) og (A.18) er V i (A.19) udregnet.

APPENDIX B

SYMBOLLISTE

Græske bogstaver

Symbol	Forklaring	Side
$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$	Sandsynlighed for type I-fejl	8
α	Testniveau	6
	Parameter i regressionsanalyse	74
β	Parameter i regressionsanalysen	74
	Teststyrke	32
$\beta_{i,i'}$	Teststyrke for test af $H_{0i,i'}$	33
β_i	Teststyrke for test af H_{0i}	33
β_j	Effekt af den j'te blok (kan være en vektor). De enkelte blokeffekter er pålagt en restriktion, således at de summerer til nul ($\Sigma\ \beta_j = 0$).	6, 20
γ	Testniveau	6
γ_{ij}	Kurtosis for fordelingen af registreringer i parcellen med den i'te sort i den j'te blok	52
$\delta_{i,i'}$	Mahalanobis afstand mellem sorterne i og i'	24
ε_{ij}	Tilfældig virkning af den i'te sort i den j'te blok. Kan være en vektor.	6, 20
ζ	Generaliseret varians.	56
η	Produktet af de enkelte karakterers varianser.	57
$\lambda_{i,i'}$	Ikke-centralitetsparameter i en F-fordeling ved sammenligning af sorterne i og i'	32
μ	Populationens middelværdi	71

Symbol	Forklaring	Side
μ_i	Middelværdi for den i'te sort (kan være en vektor).	6, 20
σ	Populationens spredning	71
σ^2	Populationens varians	6
σ_{ij}^{ℓ}	Spredning for karakter ℓ i parcellen med den i'te sort i den j'te blok.	52
Σ_{ij}	Variansmatrix for fordelingen af registreringerne i parcellen med den i'te sort i den j'te blok.	56
Σ_x	Variansmatrix for X_{ij} og ε_{ij}	20
$\phi(x)$	Tæthedsfunktionen for en standardiseret normalfordeling (er lig differentialkvotienten af $\Phi(x)$ i punktet x).	A20
$\Phi(x)$	Fordelingsfunktion for en standardiseret normalfordeling, d.v.s. sandsynligheden for, at stokastisk variabel, som er normalfordelt med middelværdi 0 og varians 1, antager en værdi mindre end eller lig x	A2

Latinske bogstaver

a	Index for år	49
b	Antal år i forsøget	16
CV_{ij}	Variationskoefficientsestimat for fordelingen af registreringerne i parcellen med den i'te sort i den j'te blok.	75
$D_{i,i'}$	Stikprøveversionen af Mahalanobis afstand mellem sorterne i og i'	26
ent(x)	Største heltal mindre end eller lig x	71

Symbol	Forklaring	Side
$E(X)$	Forventning af den stokastiske variabel X	27
$f(x)$	En funktion af x	48
$F(x)$	Fordelingsfunktion for en stokastisk variabel, d.v.s. sandsynligheden for at den pågældende variabel antager en værdi mindre end eller lig x.	82
$F^{-1}(x)$	Den inverse fordeling af fordelingsfunktionen	82
$F_{i,i'}$	F-værdi for test af nulhypotesen $H_{0i,i'}$	22
$F_{1-\alpha,p,m-p+1}$	$(1-\alpha)$-fraktilen i en F-fordeling med p frihedsgrader i tælleren og $m-p+1$ frihedsgrader i nævneren.	22
h	Index for plantenummer inden for parcel	72
$H_{0i,i'}$	Nulhypotesen at den nyanmeldte sort i har samme middelværdi som referencesorten i'	6
H_{0i}	Nulhypotesen at den nyanmeldte sort i har samme middelværdi som en af referencesorterne.	21
$H_{1i,i'}$	Den alternative hypotese til nulhypotesen $H_{0i,i'}$	22
H_{1i}	Den alternative hypotese til nulhypotesen H_{0i}	21
i	Index for sortsnummer (når det er nødvendigt at skelne mellem referencesorter og nyanmeldte sorter benyttes i' for en referencesort og i for en nyanmeldt sort).	6

Symbol	Forklaring	Side
i_0	Index for den referencesort, som ligner den nyanmeldte sort mest (evt. identisk med denne).	23, 33
j	Index for bloknummer.	6
k	Antal sorter i forsøget.	6
k_i	Antal referencesorter ved afprøvning af sort i.	21
ℓ	Index for karakternummer.	15
$\ln(x)$	Naturlig logaritme af x.	27
$LSD_{1-\alpha}$	Least Significant Difference udregnet på $100\alpha\%$ niveauet.	6
m	Antal frihedsgrader i residualvarians, $m = (k-1)(n-1)$.	6
n	Antal blokke i forsøget.	6
$N(\mu,\sigma^2)$	Normalfordelt med forventning μ og varians σ^2.	6
p	Antal karakterer.	12
$P(A)$	Sandsynligheden for hændelsen A.	16
q	Antal karaktergrupper.	45
r	Antal registrerede planter pr. parcel.	52
SAK	Summen af afvigelsernes kvadrater.	89
s	Index for gruppenummer.	45
	Estimat for σ.	6
s_{ij}	Spredning for fordelingen af registreringer i parcellen med den i'te sort i den j'te blok.	74
s^2	Estimat for σ^2.	6
s_{ij}^{ℓ}	Estimat for σ_{ij}^{ℓ}.	52

Symbol	Forklaring	Side
$t_{1-\alpha/2,m}$	$(1-\frac{\alpha}{2})$-fraktilen i en Students' t-fordeling med m frihedsgrader.	6
Var(X)	Varians af den stokastiske variabel X.	27
X	En stokastisk variabel.	
X_{ij}	Gennemsnit af registreringerne for den i'te sort i den j'te blok (kan være en vektor). (Er identisk med $\bar{X}_{ij.}$).	6 20
X_{ijh}	Registrering for den h'te plante i parcellen med den i'te sort i den j'te blok.	72
$\bar{X}_{i.}$	Gennemsnit af registreringerne for den i'te sort. (Kan være en vektor).	6, 22
Y	En stokastisk variabel (oftest ved transformation af en eller flere andre stokastiske variable).	52

Matematiske symboler

Symbol	Forklaring	Side
‾	Vandret streg over symbol angiver gennemsnit. Benyttes i forbindelse med . (punktum) på et index's plads.	6
.	Summation/gennemsnit over den/de index med . (punktum). F.eks.	6

$$X_{i.} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij}$$

$$= X_{i1}+X_{i2}+ \dots +X_{in}$$

$$\bar{X}_{i.} = \frac{1}{n}X_{i.}$$

Symbol	Forklaring	Side
'	Differentialkvotient af en funktion. Transponering af en matrix	48 22
	Index til adskillelse af symboler, som ellers ville have været ens (se f.eks. symbolet i).	6

Symbol	Forklaring	Side
$\approx$	Approximativt lig med.	27
$<$	Mindre end.	44
$\leq$	Mindre end eller lig med.	13
$>$	Større end.	15
$\geq$	Større end eller lig med.	37
$\neq$	Forskellig fra.	21
$\wedge$	Logisk symbol for og.	21
$\vee$	Logisk symbol for eller.	21
$\complement$	Komplementærmængde.	A7
$\cap$	Fællesmængde.	A1
$\cup$	Foreningsmængde.	17
$\in$	Element i.	95
$\notin$	Ikke element i.	A2
$\int_a^b f(x)dx$	Bestemt integral af funktionen f fra a til b.	A1
$\hat{}$	Hat over symbol. Mindste kvadraters estimat for symbolet. F.eks. $\hat{\beta}_j$ er mindste kvadraters estimat for β_j.	22
$*$	Index ved symbol. Maximum likelihood estimat for symbolet.	73
	Index til adskillelse af symboler, som ellers ville have været ens.	86
$\sim$	Over symbol. Et estimat for symbolet.	26
$\mid \; \mid$	Nummerisk værdi. Determinant af en matrix.	6 56
$\{ \; \}$	Mængden af de elementer der er angivet. F.eks. "$\{\varepsilon_{ij}\}$ antages normalfordelt" betyder, at alle de enkelte ε_{ij}-værdier (ε_{12}, ε_{12}, ..., ε_{kn}) antages normalfordelt.	6

Symbol	Forklaring	Side
$\prod_{\ell=1}^{p}$	Multiplikation over index ℓ for alle hele tal af ℓ fra 1 til p.	38
$\sum_{\ell=1}^{p}$	Summation over index ℓ for alle hele tal af ℓ fra 1 til p.	26
$\bigcap_{\ell=1}^{p}$	Fællesmængde over index ℓ for alle hele tal af ℓ fra 1 til p. Eksempel $\bigcap_{\ell=1}^{p} X_\ell = X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_p$.	A1
$\bigcup_{\ell=1}^{p}$	Foreningsmængde over index ℓ for alle hele tal af ℓ fra 1 til p.	17
$\max_{\ell=1,2,\ldots,p}$	Den største værdi over index ℓ for alle hele tal af ℓ til p.	44
$\min_{i'=1,2,\ldots,k_i}$	Den mindste værdi over index i' for alle hele tal af i' fra 1 til k_i.	22